1. Pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ ukažte, že její centrum, tj. množina $Z(G) = \{a \in G; (\forall g \in G)\, a \cdot g = g \cdot a\}$, tvoří normální podgrupu.

$H \trianglelefteq G$: $H \leq G$ & $\forall h \in H\ \forall a \in G\quad aha^{-1} \in H$

$\leftrightarrow$

$aH = Ha$

$H \leq G$: $\bullet\ 1 \cdot g = g \cdot 1$ ✓

$\bullet\ a \in Z(G) \overset{?}{\Rightarrow} a^{-1} \in Z(G)$

$a^{-1} \cdot g = g \cdot a^{-1}\ \forall g$

$a \cdot g = g \cdot a \quad / \cdot a^{-1}$ zleva

$g = a^{-1} \cdot g \cdot a \quad / a^{-1}$ zprava

$g \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot g$

$\bullet\ a, b \in Z(G) \overset{?}{\Rightarrow} a \cdot b \in Z(G)$

$(a \cdot b) \cdot g \overset{?}{=} g \cdot (a \cdot b)$

$= a \cdot g \cdot b$

$= g \cdot (a \cdot b)$

$a \in Z(G)$, $b \in G \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{bab^{-1}}_{} \in Z(G)$

$c \in G$

$(bab^{-1}) \cdot c = ac = ca = c(bb^{-1})a =$

$= c \cdot (b \cdot a \cdot b^{-1})$

Připomeňme, že pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a její normální podgrupu H značíme $G/H = \{gH; g \in G\}$ množinu všech levých (a současně pravých) rozkladových tříd grupy G podle H (jiné značení $[g] := gH$). Na této množině přirozeným způsobem definujeme strukturu grupy — vizte poznámky z přednášky —, které říkáme faktorgrupa grupy G podle podgrupy H. Pro počítání ve faktorgrupě jsou důležité hlavně dva vztahy:

a) $gH = fH \iff f^{-1}gH = H \iff f^{-1}g \in H$ (kde $H = 1H$ je ovšem neutrální prvek faktorgrupy G/H);

b) pokud $gH \neq fH$, pak $gH \cap fH = \varnothing$.

Naopak pro chápání pojmu faktorgrupy je zásadní vstřebat, že jde o duální konstrukci k podgrupě, kterážto konstrukce je zobecněním „počítání modulo“; také se často říká, že počítáme modulo podgrupu H.

Pokud by grupa G byla psána aditivně, prvky faktorgrupy G/H bychom značili typicky $g + H$ místo gH. Dále pak zřejmě $g + H = f + H \iff g - f \in H$. Není-li grupová operace v cvičeních níže explicitně zmíněna, je zamýšlena ta jediná smysluplná: např. $\mathbb{Q}$ je aditivní grupa, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ zase multiplikativní apod.

3. V grupě $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ popište prvky konečného řádu a ukažte, že $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je izomorfní podgrupě grupy $\mathbb{C}^*$ sestávající z prvků normy 1.

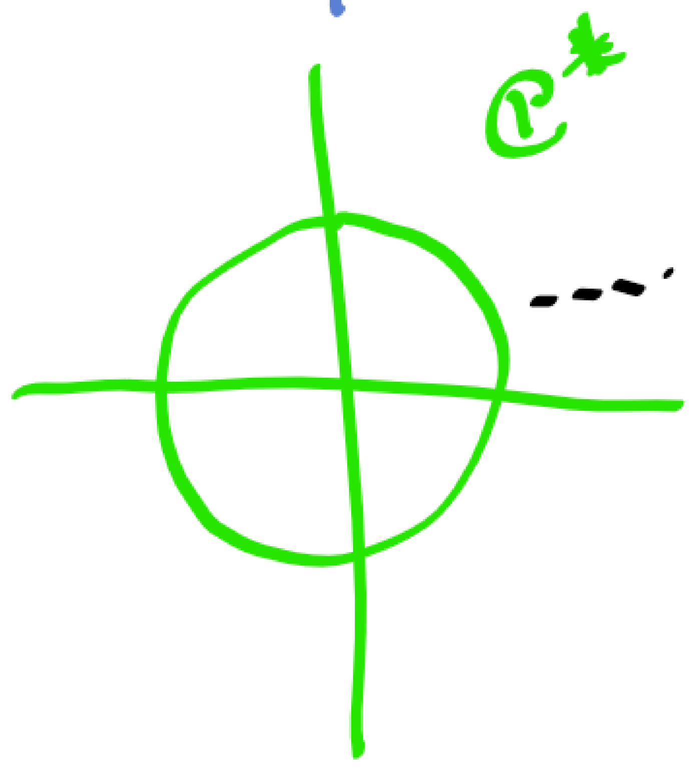
$a + \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}$

$a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z} \iff a - b \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \; \ldots\ldots \; \delta \in [0,1)$

$\delta + \mathbb{Z} = (k + \delta) + \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$0 + \mathbb{Z} = 1 + \mathbb{Z}$



$H \leq \mathbb{C}^*$

a konečného řádu pokud $\exists k \in \mathbb{N} \;\; a^k = 1$

• $\left(\frac{p}{q}\right)^q \qquad \underbrace{\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q\times} = \frac{qp}{q} = p \in \mathbb{Z}$, $p \,``=" \, 0$

• $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $\quad a^k = 1$, $a^k = \underbrace{a + \ldots + a}_{k\times} = 0$

$k \cdot a = l, \quad k, l \in \mathbb{Z}$

$a = \frac{l}{k}$ ↯

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq H$

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

t. ž. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$

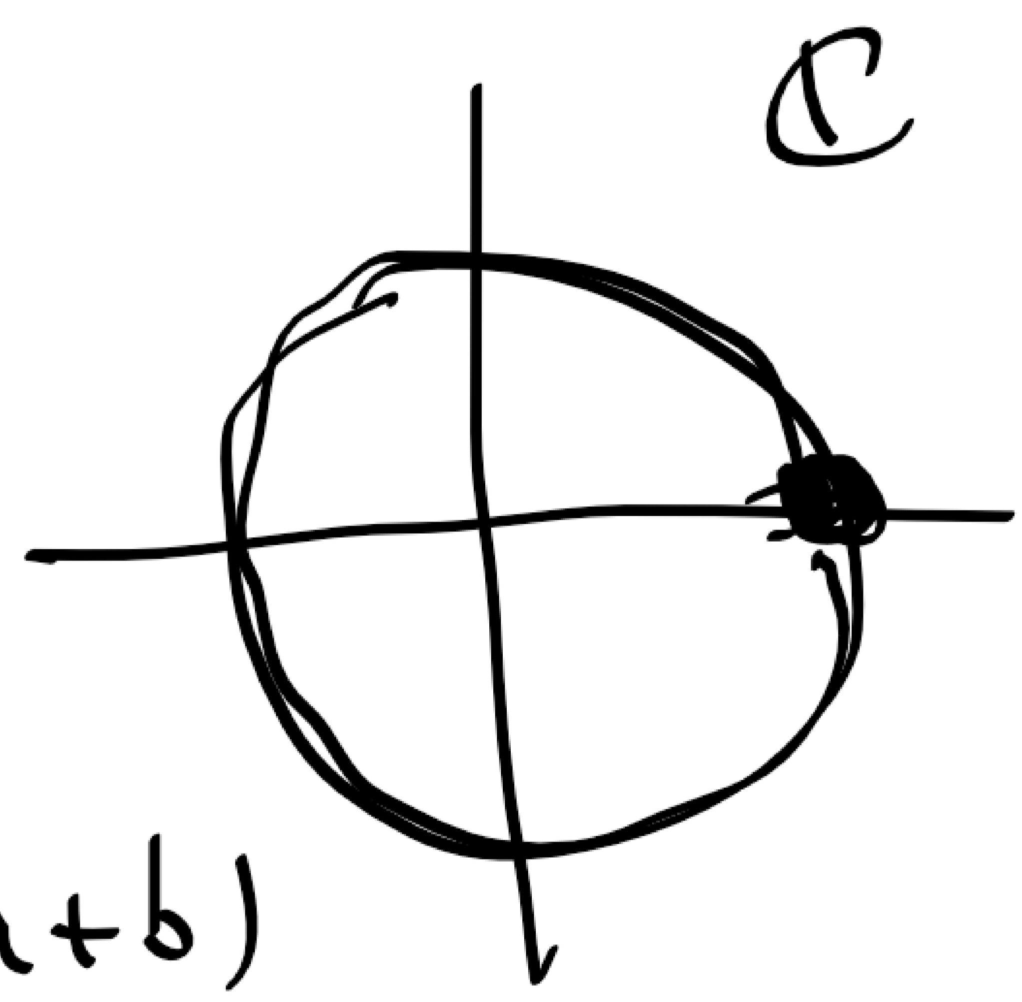
$\mathrm{Im}(\varphi) = H$

1. v. o izom.

$\rightarrow \mathbb{R}/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = H$

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$a \longmapsto e^{2\pi i a}$$



$[0,1)$

$$\varphi(a+b) = e^{2\pi i(a+b)} =$$

$$= e^{2\pi i a} \cdot e^{2\pi i b} = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = H$$

Úloha. (a) Dětská stavebnice obsahuje tři červené, tři zelené a tři modré čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením. (b) Jak se výsledek změní, pokud je možné dílky pevně spojovat? Tedy pokud dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením a převrácením.

Řešení. Místo sestav budeme uvažovat barvení jednotlivých políček čtverce. Čili X bude množina všech obarvení čtverce 3×3 daným počtem barev a $\mathbf{G}$ bude (a) grupa $\mathbb{Z}_4$ interpretovaná jako rotace čtverce, (b) grupa $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce. Grupa $\mathbf{G}$ působí na X tak, že příslušná permutace otočí/převrátí čtverec i s jeho obarvením. Řešením úlohy je počet orbit tohoto působení (dvě obarvení jsou v jedné orbitě právě tehdy, když jedno z druhého dostaneme otočením, resp. převrácením).

Napíšeme tabulku, v jejímž prvním sloupci bude seznam prvků grupy $\mathbf{G}$, přičemž zobrazení „podobného typu“ budeme sdružovat (rozumí se, že prvky „podobného typu“ mají stejně velké množiny pevných bodů), v druhém sloupci bude počet prvků daného typu a ve třetím počet pevných bodů těchto prvků. Pevným bodem se rozumí takové obarvení, které po daném otočení/převrácení vypadá stejně.

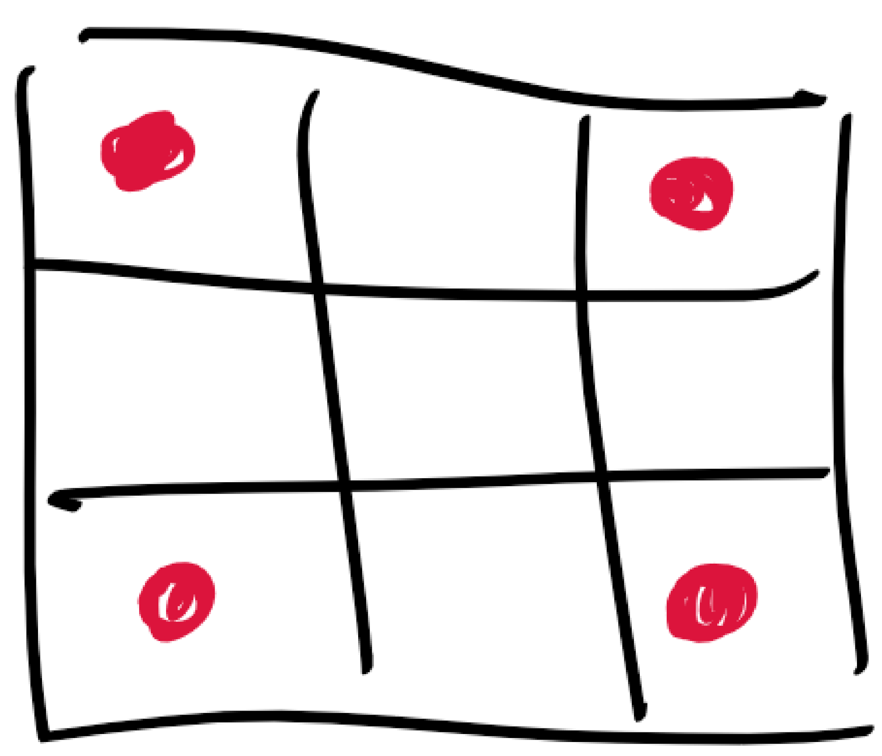
$$|X| = \binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 10\cdot 56\cdot 3 = 168\cdot 10 = 1680$$

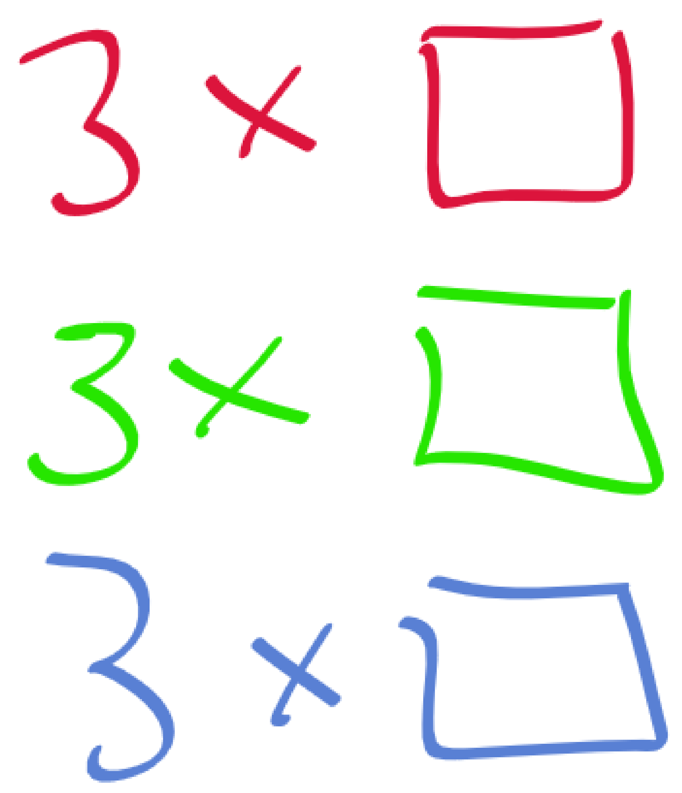
g	#	$\lvert X_g\rvert$
id	1	1680
rotace o $\pm 90°$	2	0
rotace o $180°$	1	0
osa přes vrcholy	2	36
osa středem hran	2	36

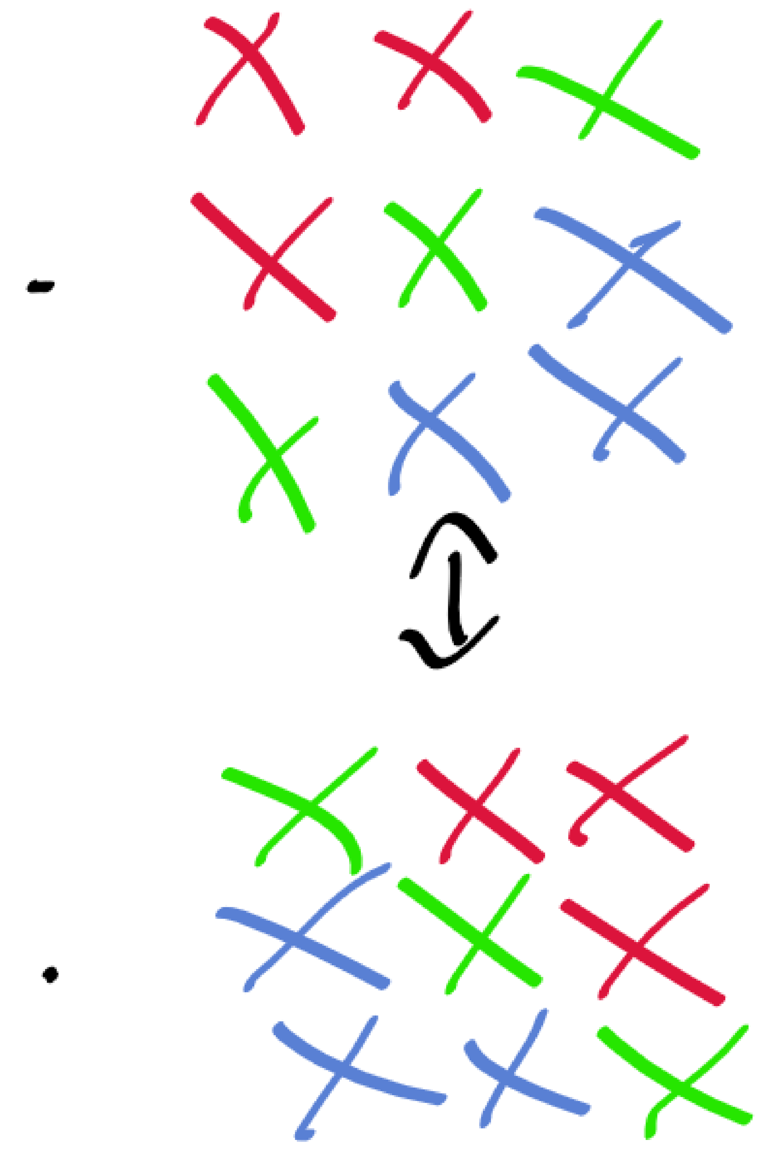
Podle Burnsideovy věty je počet obarvení

(a) $\frac{1}{4} \cdot (1680 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 420$,

(b) $\frac{1}{8} \cdot (1680 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36) = 228$. □







$\mathbb{Z}_4$:

$$\#\text{orbit} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in\mathbb{Z}_4} |X_g| = \frac{1}{4}$$