$x^4 - 1 = \dots (x^2+1)$ v $\mathbb{Z}_3$

$i \qquad -i$

$\mathbb{Z}_3(i)$

$\mathbb{Z}_3 \not\subseteq \mathbb{C}$

i

$\mathbb{R}[i]$

$\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ faktorokruh

$\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$

---

1. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Dokažte, že pokud prvek $e \in G$ splňuje $e \cdot g = g$ nebo $g \cdot e = g$ pro nějaké $g \in G$, pak $e = 1$.

2. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $g \in G$. Dokažte, že pokud prvek $h \in G$ splňuje $h \cdot g = 1$ nebo $g \cdot h = 1$, pak $h = g^{-1}$.

- je asociativní
- $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a$
- $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

1. $e \cdot g = g \quad / \cdot g^{-1}$

$(e \cdot g) \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} = 1$

$e \cdot (\underline{g \cdot g^{-1}}) = 1$

$e \cdot 1 = 1$

$e = 1$

3. Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají nějakou binární grupovou operaci $\cdot$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \cdot y$. Doplňte zbytek tabulky.

(a)

	a	b
$1 = a$	a	b
b	b	a

$b \cdot b$

(b)

	a	b	c	d
a				b
b	d	c		
$1 = c$				
d				

(c)*

	a	b	c	d	e	f
a						
b		c	a	e		
c						
d		f				b
e						
f						

a) $a \cdot b = b \Rightarrow a = 1$

$b \cdot ? = a$

b) $\boxed{b \cdot c = b \Rightarrow c = 1}$

$\cancel{a} \cdot x = \cancel{a} \cdot y$

$x = y$

c mb. d

$b \cdot b =$

4. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby následující čtveřice byly grupami:

(a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$,

(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$, kde $a * b = |a \cdot b|$,

(c)* $(\mathcal{P}(X), \Delta, ', e)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X a Δ je symetrická diference: $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$

$(8-3)-9 = 5-9 = -4$

$\neq$

$8-(3-9) = 8-(-6) = 14$

$\to$ $-$ není asociativní $\Rightarrow$ není grupa

5. Jaký řád mají následující prvky?

řád a

nejm. k t.ž. $a^k = 1$

(a) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{S}_9$,

(b) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{A}_{2020}$,

(c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$, *

(d) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,

(e) 7 v $\mathbb{Z}_{20}^*$,

(f) rotace o 144° v $\mathbf{D}_{10}$,

(g) rotace o 144° v $\mathbf{D}_{20}$,

(h) prvek k v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}$,

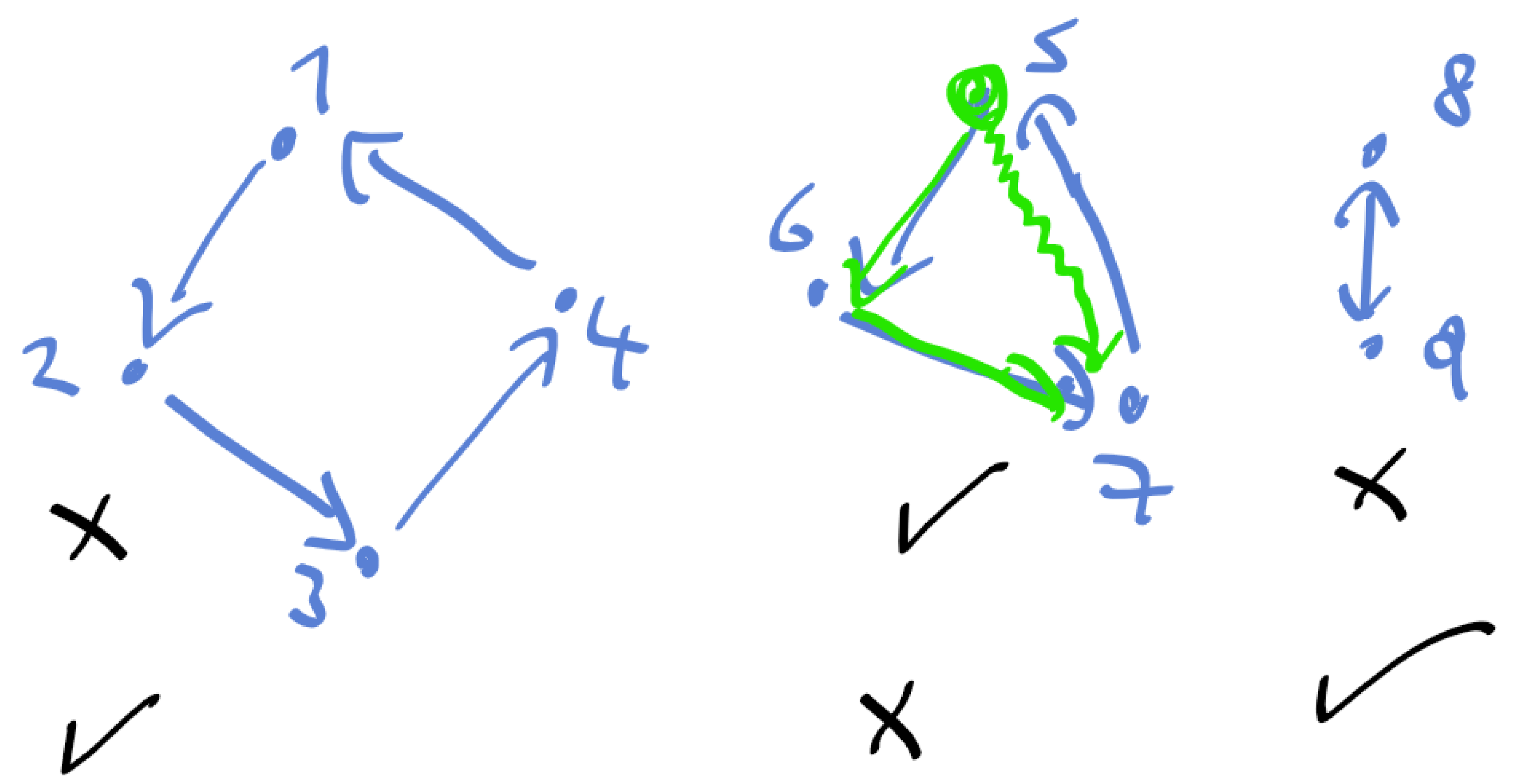
(i) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$,

(j) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu $\mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_4$.

a) S_9 má $9! = 362880$

$a, a^2, a^3, \ldots\ldots$

$a = (1234)(567)(89)$



$\hookrightarrow$ NSN$(4,3,2) = 12$

c) $4, 15$ v $\mathbb{Z}$

$4 \ldots\ldots \infty$

$15 \ldots\ldots \infty$

(d) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,

(e) 7 v $\mathbb{Z}_{20}^*$,

(f) rotace o 144° v $\mathbf{D}_{10}$,

(g) rotace o 144° v $\mathbf{D}_{20}$,

(h) prvek k v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}$,

(i) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$,

(j) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu $\mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_4$.

d) 15 v $\mathbb{Z}_{75}$: 5

4 v $\mathbb{Z}_{75}$: 75

$(\mathbb{Z}_{75}, +, -, 0)$

$15 + 15 + 15 + \dots$

$\underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{k} = k \cdot 4$

$k \cdot 4 = 75$

$\Rightarrow k = 75$

e) $\mathbb{Z}_{20}^*$ $\qquad \varphi(20) = 8$

$7^2 = 49 = 9$

7^3 ✗

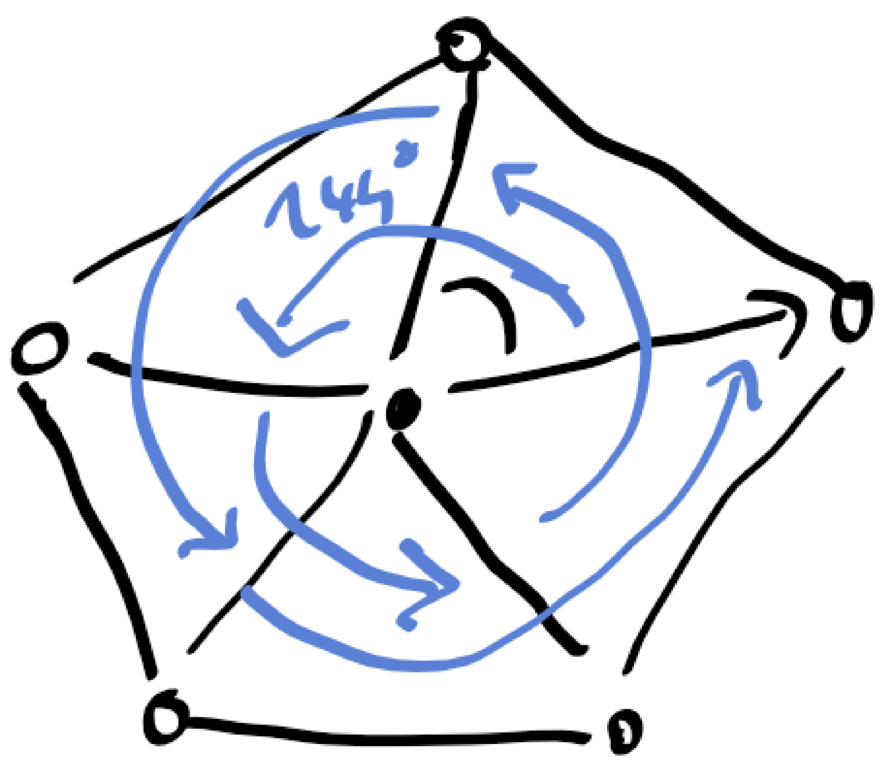
$7^4 = 9^2 = 81 = 1$

→ řád je 4

$360 : 5 = 72$

f) D_{10}, 144°

→ řád



2 · 144°

3 · 144 –

4 · · – ·

6. Doplňte následující tabulku, kde v buňce v řádku k a sloupci $\mathbf{G}_n$ bude nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že grupa $\mathbf{G}_n$ bude obsahovat prvek řádku k. Raději předpokládejte, že $\mathbf{D}_{2n}$ je definováno jen pro $n \geq 3$.

	$\mathbf{S}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbf{D}_{2n}$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$
2	2					
4	4					
11	11					
12						
1024						

$3! = 6$

$(a\ b\ c\ d)$

$(a_1\ a_2 \dots a_{11})$ v S_n

↳ má řád 11

$\overset{l_1}{(\_\_)}\overset{l_2}{(\_\_)}\overset{\dots}{(\_\_)}\dots\overset{l_m}{(\_\_)}$

$NSN(l_1, \dots, l_k) = 11$

$\Rightarrow l_i = 11$