Algebra — cvičení 11

(příklady cihlovou barvou jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

Normální podgrupy a faktorizace

1. Pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ ukažte, že její centrum, tj. množina $\mathrm{Z}(G) = \{a \in G;\ (\forall g \in G)\, a \cdot g = g \cdot a\}$, tvoří normální podgrupu.

2. Rozhodněte, zda množina $\{\pi \in \mathbf{S}_4;\ \pi^3 = \mathrm{id}\}$ tvoří normální podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.

Připomeňme, že pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a její normální podgrupu H značíme $G/H = \{gH;\ g \in G\}$ množinu všech levých (a současně pravých) rozkladových tříd grupy G podle H (jiné značení $[g] := gH$). Na této množině přirozeným způsobem definujeme strukturu grupy — vizte poznámky z přednášky —, které říkáme faktorgrupa grupy G podle podgrupy H. Pro počítání ve faktorgrupě jsou důležité hlavně dva vztahy:

a) $gH = fH \iff f^{-1}gH = H \iff f^{-1}g \in H$ (kde $H = 1H$ je ovšem neutrální prvek faktorgrupy G/H);

b) pokud $gH \neq fH$, pak $gH \cap fH = \varnothing$.

Naopak pro chápání pojmu faktorgrupy je zásadní vstřebat, že jde o duální konstrukci k podgrupě, kterážto konstrukce je zobecněním „počítání modulo“; také se často říká, že počítáme modulo podgrupu H.

Pokud by grupa G byla psána aditivně, prvky faktorgrupy G/H bychom značili typicky $g + H$ místo gH. Dále pak zřejmě $g + H = f + H \iff g - f \in H$. Není-li grupová operace v cvičeních níže explicitně zmíněna, je zamýšlena ta jediná smysluplná: např. $\mathbb{Q}$ je aditivní grupa, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ zase multiplikativní apod.

3. V grupě $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ popište prvky konečného řádu a ukažte, že $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je izomorfní podgrupě grupy $\mathbb{C}^*$ sestávající z prvků normy 1.

   A propos, pro pevně zvolené prvočíslo p se podgrupa grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (a korelativně i podgrupa grupy $\mathbb{C}^*$) sestávající ze všech prvků řádu p^n, kde $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, nazývá *Prüferova p-grupa* a značí se $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

4. Které známé grupě je izomorfní daná faktorgrupa? (Může se hodit 1. věta o izomorfismu.)

   (a) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}^*;\ r > 0\}$;

   (b) $\mathbb{C}^*/\mathbf{S}^1$, kde $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \|z\| = 1\}$.

5. Jaké známé grupě je izomorfní grupa a) $\mathbf{D}_{12}/\,\mathrm{Z}(\mathbf{D}_{12})$; b) $\mathbf{S}_4/K$, kde K je Kleinova 4prvková podgrupa?

Akce (neboli působení) grupy na množině

Připomeňte si z přednášky pojmy orbita (tranzitivity), stabilizátor a množina pevných bodů působení.

6. Uvažujme působení grupy $\mathbf{A}_5$ na množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, kteréžto působení je definováno vztahem

$$\pi(k, l, m) = (\pi(k), \pi(l), \pi(m)) \text{ pro každé } \pi \in \mathbf{A}_5.$$

   Určete počet orbit tohoto působení a nějakou množinu reprezentantů těchto orbit.

7. (a) Určete grupu rotací pravidelného čtyřstěnu (tip: označte si stěny čísly 1–4 a přemýšlejte, které permutace z $\mathbf{S}_4$ můžete realizovat otáčením čtyřstěnu).

   (b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete, kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu n barvami (až na orotování čtyřstěnu). Předpokládáme, že α) každou stěnu barvíme celistvě právě jednou barvou (tedy žádné puntíky či proužky), β) různé stěny mohou mít totožné barvy a γ) není nutné použít barvy všecky.

8. Uvažujte grupu $\mathbf{D}_{12}$ jakožto podgrupu grupy $\mathbf{S}_6$ generovanou „rotací“ (1 2 3 4 5 6) a „zrcadlením“ (2 6)(3 5).

   (a) Popište přirozené působení grupy $\mathbf{D}_{12}$ na množině $X = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ a také na množině $Y = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$.

   (b) Užijte (a) k důkazu, že $\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_2$.

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc.

9.⋆ Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Rozhodněte, zda je grupa všech regulárních horních trojúhelníkových matic $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ *s jedničkami na diagonále* normální podgrupou a) grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$, b) grupy všech regulárních horních trojúhelníkových matic nad $\mathbb{Q}$.

10.⋆ Připomeňme, že pro grupu G se izomorfismus z G na G nazývá *automorfismus grupy* G. Množina všech automorfismů grupy G se značí $\mathrm{Aut}(G)$.

   (a) Buď $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa a $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ zobrazení definované vztahem $\varphi(g)(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$. Ověřte, že se jedná o korektně definovaný homomorfismus grup $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a $(\mathrm{Aut}(G), \circ, ^{-1}, \mathrm{id}_G)$. Popište jeho jádro a zjistěte, zda $\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{Im}(\varphi)$ tvoří normální podgrupu v $(\mathrm{Aut}(G), \circ, ^{-1}, \mathrm{id}_G)$.

   (b) Předpokládejme, že zadaná grupa G je konečná. Ukažte, že $\mathrm{Inn}(G) \cong G$ právě tehdy, když $\mathrm{Z}(G)$ je triviální podgrupa.

11.⋆ Ukažte, že je-li G grupa a $G/\,\mathrm{Z}(G)$ je cyklická, pak je G komutativní.

12.⋆⋆ Dokažte, že kdykoliv má (libovolná) grupa G lineárně uspořádané podgrupy, pak $G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ a prvočíslo p.

13.⋆ Na rozdíl od grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kterou si lze představit třeba tak, že stočíte reálnou přímku do kružnice o obvodu 1 a počítáte tam s reálnými čísly modulo 1, je to s grupou $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ o poznání méně názorné. Uvědomte si například, že na $\mathbb{R}$ lze pohlížet jako na vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Lze tak psát $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \oplus D$ pro nějaký vektorový podprostor D prostoru $\mathbb{R}$.

   (a) Dokažte, že (aditivní) grupy D a $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ jsou izomorfní.

   (b) Ukažte, že existuje bijekce (nikoliv izomorfismus) $\beta : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ a pevně nějakou zvolte. Uvažujte reálnou funkci $f = \beta \circ \pi$, kde $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ je přirozená projekce na faktorgrupu, tj. $\pi(r) = r + \mathbb{Q}$. Zvolte si dvě oblíbená reálná čísla a, b, kde $a < b$, a ukažte čemu se rovná $\{f(x);\ a < x < b\}$. *Takový typický příklad darbouxovské funkce, že? A teď ještě zkuste f (lebesgueovsky) změřit!*

14.⋆ Dokažte, že má-li grupa G normální podgrupy A, B takové, že $AB = G$ a $A \cap B = \{1\}$, pak je $G \cong G/A \times G/B$.

15.⋆ Uvažujte krychli jakožto neorientovaný graf s 8 vrcholy a 12 hranami. Nechť G značí grupu všech automorfismů tohoto grafu. Dokažte, že $G \cong \mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_2$. (Předchozí úloha a nějaká ta akce grupy na množině vám může pomoci.)

16.⋆ Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze šesti černých a tří žlutých korálků, použijeme-li vždy všech devět? (Předpokládáme, že máme k dispozici potřebné propriety jako šňůrku apod.)