$N_t - A_t$ $\qquad$ $A_t = \Lambda(t \wedge X)$

ndh. čas τ je absolutně spojitý $\qquad$ $\Lambda(t) = \int_0^t \underbrace{\frac{f(u)}{1-F(u)}}_{\lambda(u)} du$ $\qquad$ $\lambda(u) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \frac{P[\tau \in [u, u+h)]}{P[\tau \geq u]}$

$$\lambda(u) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \frac{P[\tau \in [u, u+h), U \geq u]}{P[\tau \geq u, U \geq u]}$$

(pro s.v. $u \in [0, T]$)

Co když τ není absolutně spojitá náhodná veličina

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1-F(u-)} dF(u)$$

F distribuční funkce τ

<u>Věta:</u> Buďte τ a U nezávislé $\in (0,T]$, $N_t = \mathbb{1}[\tau \le t]\delta = \mathbb{1}[X \le t]\delta$

$N_t^U = \mathbb{1}[X \le t](1-\delta)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, N_s^U; s \le t)$

Pak proces $N_t - A_t = N_t - \underbrace{\int_0^t \mathbb{1}[X \ge u]\, d\Lambda(u)}_{\Lambda(t \wedge X)} = N_t - \int_0^t \mathbb{1}[X \ge u] \dfrac{dF(u)}{1-F(u-)}$

je $\mathcal{F}_t$-martingal <u>právě když</u>

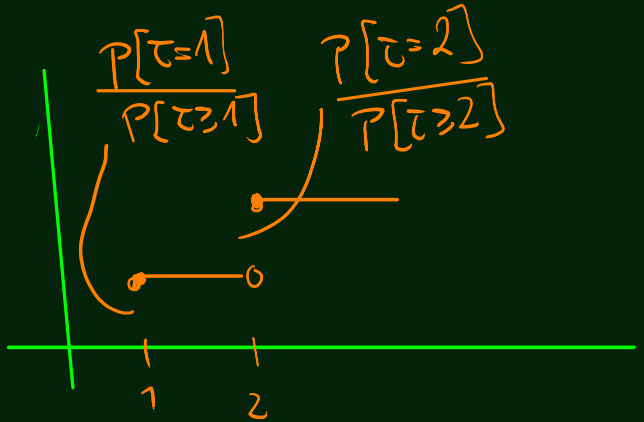
$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{P[\tau \ge u, \underline{U \ge u}]}\, dP[u, \underline{U \ge u}] = \int_0^t \frac{1}{P[\tau \ge u, \underline{U \ge u}]} P[du, \underline{U \ge u}]$$

$$d\Lambda(t) = \frac{-\partial}{\partial u} P[\tau \ge u, \underline{U \ge t}]\Big|_{u=t} \cdot \frac{1}{P[\tau \ge t, \underline{U \ge t}]}$$

Pokud U a T jsou nezávislé, tato podmínka platí.

Nechť τ je celočíselné (diskrétní)

$\Lambda(t)$ jde o po částech konstantní funkci, má v časových okamžicích $1, 2, \dots, N$ skoky o velikosti $\dfrac{P[\tau = k]}{P[\tau \geq k]}$



$$\Lambda(t) = \sum_{k \leq t} \frac{P[\tau = k]}{P[\tau \geq k]}$$

a zmíněná věta vyžaduje k tomu, aby $N_t - A_t$ byl martingal rovnost

$$\sum_{k \le t} \frac{P[\tau = k]}{P[\tau \ge k]} = \sum_{k \le t} \frac{P[\tau = k, U \ge k]}{P[\tau \ge k, U \ge k]}$$

$N_t - A_t$ je martingal

<u>Doob-Meyer</u> submartingal $N \Rightarrow \exists$ až na modifikaci jediný neklesající <u>$\mathcal{F}_t$-prediktabilní</u> proces A, $A_0 = 0$ a $N_t - A_t$ je martingal

Je-li τ absolutně spojitá n. vel.

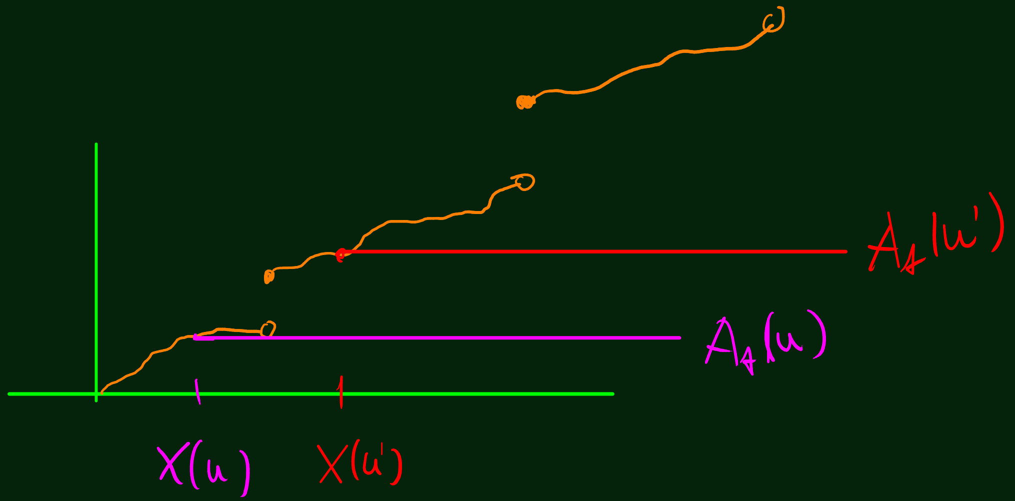
$t \longmapsto A_t = \int_0^t 1[X \ge u] \lambda(u)\, du$ je spojité zobrazení $\Rightarrow$ a tedy spojité $\mathcal{F}_t$-prediktabilní není-li τ absolutně spojité

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{dF(u)}{1-F(u-)}$$

$\leftarrow$ skoky jsou v bodech, kde má skoky F, distribuční funkce v čase τ.

Skoky jsou o velikosti $\dfrac{P[\tau=t]}{P[\tau\geq t]}$

$$A_t = \Lambda(t \wedge X)$$

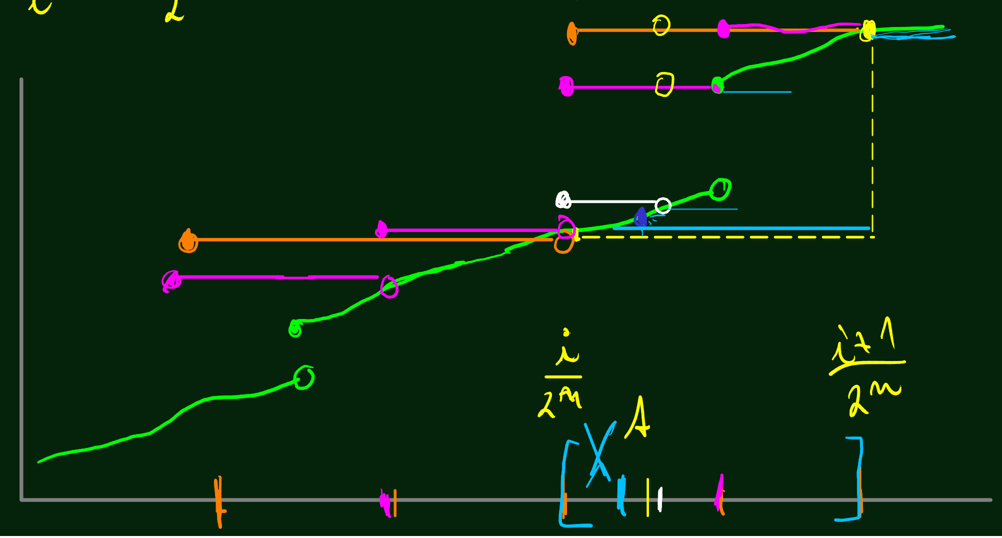


Věta: Nechť σ, U, X jsou definovány jako v předchozí větě.

Pak proces $A_t = \int_0^t 1[X \geq u]\, d\Lambda(u)$ je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

Důkaz: bez újmy na obecnosti mějme $T = 1$

$A_i^n = \frac{i}{2^n}$ $\quad i = 0, 1, \dots, 2^n$ (zjemňující se dělení pomocí dyadických čísel)



Přírůstek Λ na intervalu $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$ je $\Lambda\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\frac{i}{2^n}\right)$

$$\Lambda^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\Lambda\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) \cdot \mathbb{1}\left[t \geq \frac{i}{2^n}\right]$$

$$\Lambda^n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda(t) \qquad \forall t \in [0,1]$$

2) aproximace A $\qquad A_t = \Lambda(t \wedge X)$

$$A_t^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\Lambda\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) \mathbb{1}\left[t \geq \frac{i}{2^n}\right] \cdot \mathbb{1}\left[X \geq \frac{i}{2^n}\right]$$

A_t^n je zprava spojitá a $A_t^n \searrow A_t$

$$A^n_t = \sum_{i=0}^{2^n-1} 1\left[t\in\left[\tfrac{i}{2^n},\tfrac{i+1}{2^n}\right)\right] \Lambda^n_t \cdot \underbrace{1\left[X \geq \tfrac{i}{2^n}\right]}_{\text{náhodné}} + \Lambda^n_{\frac{i+1}{2^n}} \cdot 1\left[t \geq \tfrac{i+1}{2^n}\right].$$

$$\underbrace{1\left[\tfrac{i}{2^n} \leq X < \tfrac{i+1}{2^n}\right]}_{\text{náhodné}}$$

$$A^n_t = \sum_{i=0}^{2^n-1} k(i,t)\cdot \underbrace{1\left[X\geq \tfrac{i}{2^n}\right]}_{\in \mathcal{F}_{t-}} + l(i,t)\, \underbrace{1\left[\tfrac{i}{2^n} \leq X < \tfrac{i+1}{2^n}\right]}_{\in \mathcal{F}_{t-}}$$

$t\in\left[\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right)$ $\qquad$ $t \geq \frac{i+1}{2^n}$

$1 - 1\left[X<\frac{i}{2^n}\right]$

A^n je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces $\Rightarrow$ je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní