$N_t = 1_{[\tau \le t]} \cdot \delta$ τ čas selhání

U čas cenzorování

X čas události $X = \tau \wedge U$

$\delta = 1[\tau \le U] = 1[X = \tau]$

Poissonův proces s intenzitou $\lambda(s) > 0$ $\int_0^T \lambda(s)\,ds < \infty$ N_t

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$

$N_t - \Lambda(t)$ je opravdu spojitý martingal.

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda(t)$$

τ spojité rozdělení

---

riziko v čase t $\quad \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P[\tau \in [t, t+h) \mid \tau \geq t] = -\frac{S'(t)}{S(t)}$ s.v. t

$S(t) = 1 - F(t)$ $\quad F$ dist. fce τ

$$S(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\,ds\right)$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$$ kumulativní riziková funkce

τ abs. spojitá $\quad \Lambda(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)}\,ds$ $\quad$ $f(s)$ je hustota rozdělení τ

$F(s)$ distr. funkce rozd. τ

je-li τ diskrétní $\quad P[\tau = t_i] = p_i \quad t_1 < t_2 < \cdots$

Λ je funkce po částech konstantní a v bodě t_i má skok o velikosti

$$\frac{p_i}{\sum_{j \geq i} p_j}$$

$$\Lambda(t_i) = \sum_{k=1}^{i} \frac{p_i}{\sum_{j \geq i} p_j} = P[\tau = t_i \mid \tau \geq t_i]$$

$$\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{1}{1 - F(s-)} \, dF(s)$$

$\leftarrow$ pro τ spojité i diskrétní jsou-li U a τ nezávislé + τ je absolutně spojité

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P\left[\tau \in [t, t+h) \mid \tau \geq t\right] = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P\left[\tau \in [t, t+h) \mid \tau \geq t, U \geq t\right]$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P\left[\tau \in [t, t+h) \mid X \geq t\right]$$

jiný zápis $P\left[\tau \in [t, t+h) \mid X \geq t\right] = \lambda(t) h + o(h)$

$$\parallel$$

$$P\left[\underbrace{N_{t+h-} - N_{t-}}_{\in\{0,1\}} = 1 \mid X \geq t\right] = E\left[N_{t+h-} - N_{t-} \mid X \geq t\right]$$

navrhneme

$$A_1 = \int_0^1 \lambda(u)\cdot \mathbb{1}[X\geq u]\,du$$

$$P[\tau\geq u, U\geq u] \underset{\text{nezáv.}}{=} P[\tau\geq u]\,P[U\geq u]$$

$$EA_1 = E\int_0^1 \lambda(u)\,\mathbb{1}[X\geq u]\,du = \int_0^1 \lambda(u)\,P[X\geq u]$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\lambda(u)}_{\frac{f(u)}{1-F(u)} = \frac{f(u)}{P[\tau\geq u]}} P[\tau\geq u]\,P[U\geq u]\,du = \int_0^1 P[U\geq u]\cdot f(u)\,du$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{P[\tau\in(u-h,u]]}{h} \quad \text{s.v. } u$$

$$= \int_0^1 P[U\geq u]\cdot \lim_{h\to 0+}\frac{P[\tau\in(u-h,u]]}{h}\,du$$

$$\int_0^t \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} P\left[U \geq u, \tau \in (u-h, u]\right] du = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} P\left[U \geq u, \tau \leq x\right]\Big|_{x=u} du$$

$$= P\left[U \geq t, \tau \leq t\right] = P\left[\overset{\in \{0,1\}}{N_t} = 1\right] = E N_t$$

$$N_t = 1[\tau \leq t] \cdot 1[U \geq \tau]$$

$$M_t = N_t - A_t \qquad E M_t = 0$$

$$N_t - \int_0^t 1[X \geq u]\, \lambda(u)\, du = 1[X \leq t, \delta = 1] - \Lambda(t \wedge X)$$

Věta: Nechť T je nezáporná absolutně spojitá náhodná veličina

U kladná náhodná veličina, $T, U \leq T$. $X = T \wedge U$ čas události

$$\delta = 1[T \leq U] = 1[X = T]$$

$$N_t = 1[X \leq t, \delta = 1]$$ do času t došlo k události a tou je SELHÁNÍ

$$N_t^U = 1[X \leq t, \delta = 0]$$ CENZOROVÁNÍ

$$\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, N_s^U, s \leq t)$$

$\lambda(t)$ rizikové funkce pro T (tj. pro n. v. T ... $\boxed{\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}}$)

Pak proces $M_t = N_t - A_t$ $\quad$ A_t je $\int_0^t 1[X \le u]\,\lambda(u)\,du$

~~je martingal~~ tehdy a jen tehdy je-li

$$\boxed{(*)\ \lambda(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{P[T \in [t, t+h), U \ge t]}{P[T \ge t, U \ge t]}}$$

pro s.v. t taková

$P[X \ge t] > 0.$

Pokud jsou T a U nezávislé, pak $\lambda(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{P[T \in [t, t+h)] \cdot \cancel{P[U \ge t]}}{P[T \ge t]\, \cancel{P[U \ge t]}}$

Pokud T a U splňují (*), pak řekneme, že U je cenzorování nezávislé na T (nezávislost náhodných veličin U a τ je silnější tvrzení)

Podmínku (*) můžeme zapsat

$$\lambda(t) = \left. \frac{-\frac{\partial}{\partial u} P[T \geq u, U \geq t]}{P[\tau \geq t, U \geq t]} \right|_{u=t}$$