Obecnější gaussovské procesy

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad \int_0^1 f^2(t)\,dt < \infty$

$$\Big(\underbrace{\int_0^t f(s)\,dW_s}_{= Y_t},\ t \in [0,1] \Big)$$ je centrovaný gaussovský

$$E Y_t = 0, \quad \operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\,du \quad \text{pro } s,t \in [0,1]$$

$\{X_{k,n,j}\}$ schémata martingalových diferencí pro $k = 1, 2, \dots, \ell$

$j = 1, \dots, r_n(k)$, $\quad n \in \mathbb{N}$

vůči filtraci $\{\mathcal{F}_{k,n,j}\}$ předpokládejme r_n jsou stejné pro všechna k, tedy

$r_n(t) = \lfloor r_n \cdot t \rfloor$

$$W^n_{k,t} = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{k,n,j} \qquad t \in [0,1]$$

<u>Věta</u>: Nechť pro schémata m.d. $\{X_{k,n,j}\}$ (r_n nezávisí na k) platí

1) $\forall t \in [0,1]$

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} E\left[X^2_{k,n,j} \mid \mathcal{F}_{k,n,j-1}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t f_k^2(s)\,ds \qquad \left(n^{-2} \sum_{j=1}^{r_n(t)} X^2_{n,j} \xrightarrow{P} t \right)$$

kde $\int_0^1 f_k^2(s)\,ds < \infty \quad \forall k = 1, \dots, \ell$

2) $\forall t \in [0,1]$ $\quad \sum_{j=1}^{n_n(t)} E\left[X_{\ell,n,j}^2 \cdot 1_{|X_{\ell,n,j}|>\varepsilon}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

3) $\forall t \in [0,1]$ $\quad k, k'$ různé

$$\sum_{j=1}^{n_n(t)} E\left[X_{k,n,j} \cdot X_{k',n,j} \,\middle|\, \mathcal{F}_{k,n,j-1} \vee \mathcal{F}_{k',n,j-1}\right] \xrightarrow{P} 0$$

(postačující podmínkou je nezávislost s. m. d. pro k, k')

Pak $(W_1^n, \dots, W_\ell^n) = \left((W_{1,t}^n, \dots, W_{\ell,t}^n), t \in [0,1]\right)$

$$\xrightarrow{d} \left(\int_0^t f_1 \, dW_1, \dots, \int_0^t f_\ell \, dW_\ell\right),$$

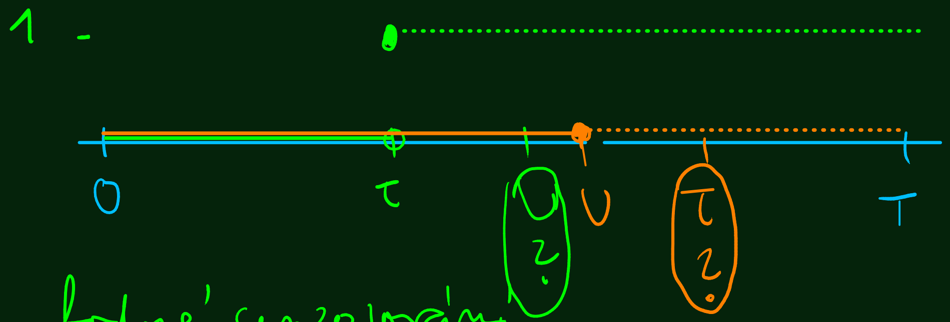
kde $W_1, \dots, W_\ell$ jsou nezávislé Wienerovy procesy.

Čítací proces a cenzorování

$[0,T]$ časový úsek

τ ... okamžik selhání $\quad (\tau \leq T)$

U ... čas cenzorování



$X = \tau \wedge U$ je okamžik události $\leftarrow$ bodové cenzorování

$$N_t = 1[\tau \leq t,\ X = \tau] = 1[\tau \leq t] \cdot \delta \quad , \quad \delta = \mathbb{1}[\tau \leq U]$$

čítací proces

Riziko a kumulativní riziko

riziko v čase t:

$$\lambda(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{P[t \le \tau < t+h]}{h\, P[\tau \ge t]} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} P\big[\tau \in [t, t+h) \,\big|\, \tau \ge t\big]$$

Pokud je τ absolutně spojitá

$$\left(\text{jinak} \quad \frac{F(t+h-) - F(t-)}{h} \cdot \frac{1}{1-F(t-)} \right)$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \cdot \frac{1}{1-F(t)} \overset{\text{s.v.}}{=} \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

$\downarrow$

pro s.v. t derivace existuje $f(t)$ hustota rozdělení τ

$S(t) = 1 - F(t)$

je funkce přežití (survival function)

$$\frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{-(1-F(t))'}{1-F(t)} = \frac{-S'(t)}{S(t)} = -(\log S(t))'$$

v bodech, kde existuje derivace $S(t)$ je $\lambda(t) = -\log(S(t))'$

$(S(t) \neq 0)$

$$S(t) = \exp\Big(-\underbrace{\int_0^t \lambda(s)\,ds}_{\text{kumulativní riziko}}\Big)$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$$

τ má abs. spojité rozdělení $\quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds = \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)}\,ds$

Pokud τ není absolutně spojité

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1-F(s-)}\,dF(s)$$

Pokud $P[\tau = t_i] = p_i \in (0,1) \quad t_i \in [0,T] \quad t_1 < t_2 < \dots$

$\sum p_i = 1$

pak Λ je po částech konstantní

má v bodech t_i skoky o velikosti $\dfrac{p_i}{\sum_{j \geq i} p_j} = P[\tau = t_i \mid \tau \geq t_i]$