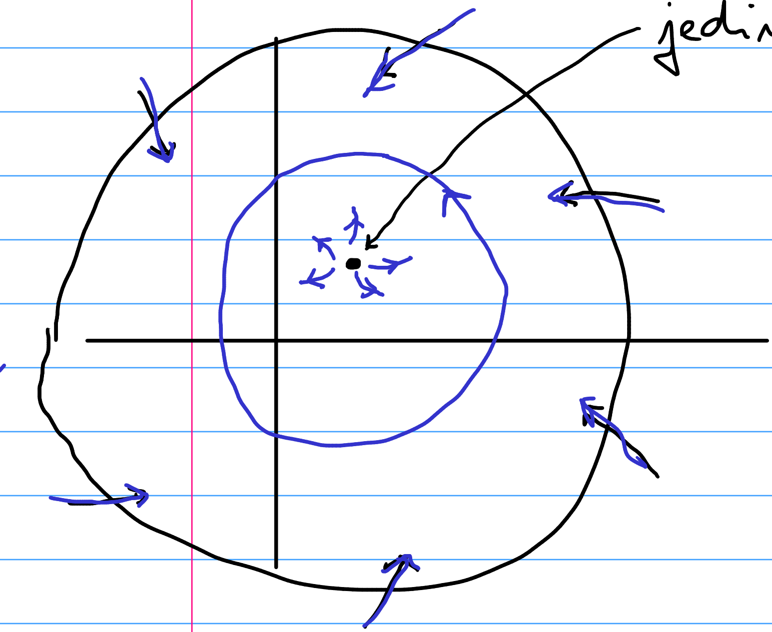
# ApDR – 12. PŘEDNÁŠKA

**MINULE:** Modely nervového impulsu

FitzHugh – Nagumo

$$\boxed{(\text{F-N}) \quad \begin{aligned} u' &= u(1-u)(u-a) - w + I(t) \\ w' &= bu - \gamma w \end{aligned}}$$

jediný stacionární bod



Pak nutně existuje periodické řešení.

$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$

**Poincarého–Bendixsonova věta:** Je-li řešení $u$ rovnice $u' = f(u)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ omezené a def. na $(0, +\infty)$, pak
- buď existuje stacionární bod $\tilde{x}$ a posl. časů $t_n \nearrow +\infty$, že $\lim\limits_{n\to\infty} u(t_n) = \tilde{x}$
- nebo existuje periodické řešení $\tilde{u}$ a $\Gamma = \{\tilde{u}(t), t \in \mathbb{R}\}$, že $\operatorname{dist}(u(t), \Gamma) \to 0$ pro $t \to +\infty$.

---

Zbývá ukázat, že velký kruh je positivně invariantní

$u = r \cos\alpha \qquad\qquad u' = r'\cos\alpha - r \sin\alpha \, \alpha'$

$w = r \sin\alpha \qquad\qquad w' = r' \sin\alpha + r\cos\alpha \, \alpha'$

$$r' = u'\cos\alpha + w'\sin\alpha = \big(u(1-u)(u-a) - w + I\big)\cos\alpha$$
$$+ (bu - \gamma\cdot w)\sin\alpha$$
$$= \big(-u^3 + (1+a)u^2 - au - w + I\big)\cos\alpha$$
$$+ (bu - \gamma w)\sin\alpha$$
$$= -r^3\cos^4\alpha + (1+a)r^2\cos^3\alpha - ar\cos^2\alpha - r\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+ I\cos\alpha + br\cos\alpha\sin\alpha - \gamma r\sin^2\alpha$$
$$r' = \underline{-r^3\cos^4\alpha} + (1+a)r^2\cos^3\alpha$$
$$+ r\big(-a\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha - \gamma\sin^2\alpha\big)$$
$$+ I\cos\alpha$$

Odhad pro $r$ velké je $r' < 0$.

$|\cos\alpha| > \varepsilon$ ... tam, kde $\cos\alpha \sim 0$.

(k ověření!)

# V. MODELY VYUŽÍVAJÍCÍ PDR

PDR ... parciální diferenciální rovnice

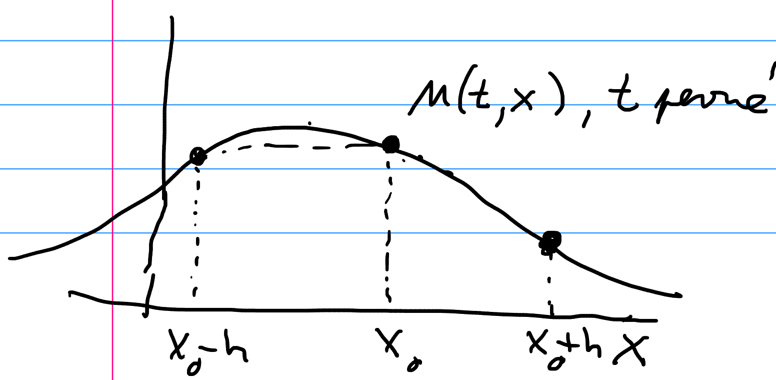
- neznámá funkce závisí na čase $t$ a na poloze $x$ ... $u(t,x)$; $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

diferenciální rovnice může obsahovat parciální derivace podle $t$ a parciální derivace podle $x$ $\rightsquigarrow$ PDR

- často se vyskytuje člen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .. v $\mathbb{R}$, resp.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad \dots \text{ v } \mathbb{R}^n$$

např. v rovnici vedení tepla, rovnici difúze




- popisuje rozložení teploty v drátu (1D)
- koncentraci nějaké látky v 1D potrubí

$$u'(x_0) \sim \underbrace{\underbrace{u(x_0+h)-u(x_0)}_{\Delta_h u(x_0)} + \underbrace{u(x_0-h)-u(x_0)}_{-\Delta_h u(x_0-h)}}_{\Delta_h \Delta_h u(x_0-h) \sim \underline{\underline{\Delta_{hh} u(x_0-h)}}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

---

## V.1 Nervové impulzy

FitzHugh–Nagumo model

$u' = u(1-u)(u-a) - v + I(t)$ $\qquad u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$v' = bu - \gamma v$

$\Downarrow$ akon je 1D

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t u &= u(1-u)(u-a) - v + \partial_{xx} u \\ \partial_t v &= bu - \gamma v \end{aligned}}$$

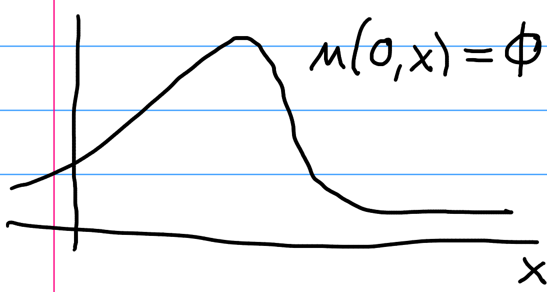
$u, v : \mathbb{R} \times \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \mathbb{R}$

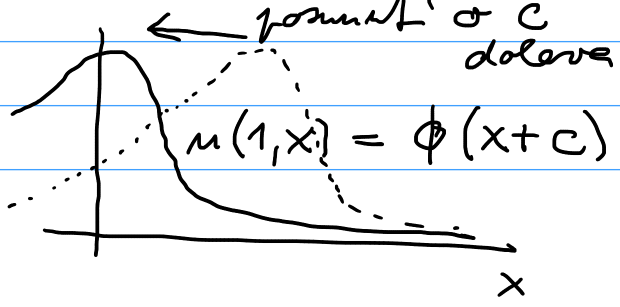
$(I \equiv 0)$

- typicky je potřeba předepsat
  - počáteční podmínky $u(0,x) = u_0(x)$ v čase 0
  - $v(0,x) = v_0(x)$
  - okrajové podmínky … pro $x$ na hranici resp. v $\infty$

Hledejme řešení ve tvaru cestující vlny (traveling wave)

$$\boxed{u(t,x) = \phi(x+ct),\ v(t,x) = \psi(x+ct)}$$



dosadíme do PDR za $u$ a $w$ :

$$\partial_t u = \phi'(x+ct)\cdot c \qquad \partial_x u = \phi'(x+ct)$$

$$\boxed{\begin{aligned} c\phi' &= \phi(1-\phi)(\phi-a) - w + \phi'' \\ c\psi' &= b\phi - \gamma\psi \end{aligned}}$$

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta' &= +c\cdot\vartheta - \phi(1-\phi)(\phi-a) + \psi \\ \phi' &= \vartheta \\ \psi' &= \frac{b}{c}\phi - \frac{\gamma}{c}\psi \quad \dots \end{aligned}} \qquad \phi' = \vartheta$$

systém 3. řádu

- předepíšeme okrajové podmínky
  (pro jednoduchost předpokládejme, že axon je nekonečně dlouhý .. na $\mathbb{R}$)

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\phi(\xi) = 0 = \lim_{\xi\to\pm\infty}\phi'(\xi) = \lim_{\xi\to\pm\infty}\psi(\xi)$$

- počáteční podmínky ... rovno $\Phi$ ... nepředepisujeme
- řešení ODR (*) existuje (aspoň lokálně)

  ⇝ zkusme provést kvalitativní analýzu

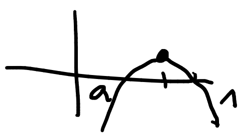
Stacionární body: $\vartheta = 0$, $\psi = \frac{b}{\gamma}\phi$

$$\phi(1-\phi)(\phi-a) - \frac{b}{\gamma}\phi = 0$$

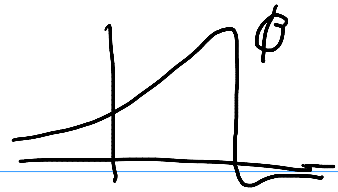
$$P(\phi) = \phi\left[(1-\phi)(\phi-a) - \frac{b}{\gamma}\right] = 0$$

Předpokládejme, že $P(\phi)$ má jediný kořen $\phi = 0$

$$\max\,(1-\phi)(\phi-a) \underset{\phi=\frac{a+1}{2}}{=} \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 < \frac{b}{\gamma}$$



$$\boxed{(1-a)^2 < 4\cdot\frac{b}{\gamma}}$$

Očekáváme impuls tvaru 

Zintegrujme rovnice $\int_{-\infty}^{\infty}$ (předp., že integrály existují)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi'' = \left[\phi'(\xi)\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\xi\to\infty}\phi' - \lim_{\xi\to-\infty}\phi' = 0-0=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi' = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi' = 0$$

$$\phi'' = +c\phi' - \phi(1-\phi)(\phi-a) + \psi \qquad / \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$c\psi' = b\phi - \gamma\psi$$

$$0 = 0 - \int_{-\infty}^{\infty}\phi(1-\phi)(\phi-a)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}\psi\,d\xi$$

$$0 = b\int\phi - \gamma\int\psi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(1-\phi)(\phi-a) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi = \frac{b}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\phi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi\left[(1-\phi)(\phi-a) - \frac{b}{\gamma}\right]d\xi = 0$$

$\Rightarrow$ integrand je někde nulový

$\Rightarrow$ $\phi(\xi_0) = 0$ pro nějaké $\xi_0$

$[\dots] < 0 \quad \forall\xi \dots \phi(\xi) \Rightarrow \phi\equiv 0$

nebo $\phi$ mění znaménko

(nevíme, zda jen jednou)

zda odpovídá profilu výše.

## Odhad rychlosti $c$:

$$\phi'' = c\phi' - \phi(1-\phi)(\phi-a) + \psi$$
$$c\psi' = b\phi - \gamma\psi$$

$\text{I}\cdot\phi \int_{-\infty}^{\infty}$ : $\int \phi''\phi = c\underbrace{\int \phi'\phi}_{=0} - \int \phi^2(1-\phi)(\phi-a) + \int \psi\phi$

$\phi'\cdot\phi = \left(\frac{1}{2}\phi^2\right)'$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\phi'\phi = \left[\frac{1}{2}\phi^2\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty}\phi''\phi = \underbrace{\left[\phi'\phi\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\phi'^2$

(1) $\quad -\int \phi'^2 = -\int \phi^2(1-\phi)(\phi-a) + \int \psi\cdot\phi$

(2) $\text{II}\cdot\psi$ : $\underbrace{\int \psi'\psi}_{=0} = b\int \phi\psi - \gamma\int \psi^2$

(3) $\text{I}\cdot\phi'$ : $0 = c\int \phi'^2 - \underbrace{\int \phi(1-\phi)(\phi-a)\phi'}_{=0} + \int \psi\phi'$

$\int [P(\phi)]'$ $\quad$ P prim. fct. $\phi(1-\phi)(\phi-a)$

$= [P(\phi)]_{-\infty}^{\infty} = P(0) - P(0)$

(4) $\text{II}\cdot\psi'$ : $c\cdot\int \psi'^2 = b\cdot\int \phi\psi' - \gamma\underbrace{\int \psi\psi'}_{=0}$ $\qquad \int \phi\psi' = -\int \phi'\psi$ per partes

(5) $\text{II}\cdot\phi$ : $c\cdot\int \psi'\phi = b\int \phi^2 - \gamma\int \psi\phi$ $\qquad c\int \phi'^2 = \frac{c}{b}\int \psi'^2$ $\quad$ (3)+(4)

$$\int \phi^2(1-\phi)(\phi-a)\,d\xi \overset{(1)}{=} \underbrace{\int \phi'^2}_{=\frac{1}{b}\int \psi'^2} + \underbrace{\int \phi\psi}_{=-\frac{c}{\gamma}\int \psi'\phi + \frac{b}{\gamma}\int \phi^2}$$

$$= -\frac{c}{\gamma}\frac{c}{b}\int \psi'^2 + \frac{b}{\gamma}\int \phi^2$$

$$\int \phi^2(1-\phi)(\phi-a) = \frac{1}{b}\int \psi'^2 - \frac{c^2}{\gamma b}\int \psi'^2 + \frac{b}{\gamma}\int \phi^2$$

$$\int \underbrace{\phi^2}_{\geq 0}\left[\underbrace{(1-\phi)(\phi-a)}_{<0} - \frac{b}{\gamma}\right] d\xi = \frac{1}{\gamma b}(\gamma - c^2)\underbrace{\int \psi'^2}_{\geq 0} \Rightarrow \gamma - c^2 < 0$$

$$\boxed{c^2 > \gamma}$$

Ještě vylepšíme :

$$\int \phi^2 (1-\phi)(\phi-a) = \underbrace{\frac{1}{b}\int \psi'^2}_{=\frac{1}{c}\int \phi\psi'} + \int \phi\psi$$

$$\frac{1}{c}\int \phi\psi' = \frac{b}{c^2}\int \phi^2 - \frac{\gamma}{c^2}\underbrace{\int \phi\psi}_{=\frac{\gamma}{b}\int \psi^2}$$

$$\int \phi^2 (1-\phi)(\phi-a) = \frac{b}{c^2}\int \phi^2 + \frac{\gamma}{b}\int \psi^2 \left(1-\frac{\gamma}{c^2}\right)$$

$$\underbrace{\int \phi^2}_{>0} \left[(1-\phi)(\phi-a) - \frac{b}{c^2}\right] = \frac{\gamma}{b}\underbrace{\left(1-\frac{\gamma}{c^2}\right)}_{>0}\underbrace{\int \psi^2}_{>0} \geq 0$$

$\Rightarrow [\ldots]$ nabývá i kladných hodnot

$$(1-\phi)(\phi-a) < \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$$

víme

(zlepšený odhad)

$$\frac{b}{c^2} < \frac{(1-a)^2}{4} \Rightarrow \boxed{c^2 > \frac{4b}{(1-a)^2}} > \gamma$$