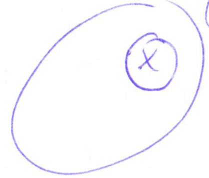
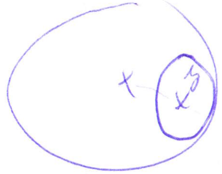
(P,ρ), $G \subset P$ ot $\quad \forall x \in G\ \exists r>0\ \ B(x,r) \subset G$



G

$F \subset P$ uzavřená $\iff$ $P \setminus F$ je otevřená

$B(x,r)$ je otevřená



$B(x,r)$

$B(y,\tilde{r})$, $\tilde{r} = r - \rho(x,y)$ $\quad B(y,\tilde{r}) \subset B(x,r)$

V9.1 (i) $\emptyset$ a P jsou otevřené (ii) $G_1,\dots,G_n$ ot $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ot

(iii) $G_\alpha, \alpha \in A$, otevřené $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřené

Věta 9.2 (vlastnosti uzavřených množin). Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Pak (i) $\emptyset$ a P jsou uzavřené.

(ii) Jsou-li $F_1,\dots,F_n$ uzavřené $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ je uzavřená.

(iii) Jsou-li $F_\alpha, \alpha \in A$, uzavřené $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená.

Dk: (i) $P \setminus \emptyset = P$, $\quad P \setminus P = \emptyset$ $\quad$ (P a $\emptyset$ jsou otevřené $\Rightarrow$ $\emptyset$ a P jsou uz.

(ii) F_i uzavřená $\Rightarrow$ $P \setminus F_i$ je otevřená $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(P \setminus F_i)}_{ot}}_{ot}$ je otevřená podle V9.1.(ii) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ je uz.

(iii) $P \setminus F_\alpha$ ot $\Rightarrow P \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \overbrace{\bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{(P \setminus F_\alpha)}_{ot}}^{ot}$ podle V9.1(iii) $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uz. ∎

$\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1)$ není uz. $\mathbb{R}\setminus(0,1) = (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$

$B(0,1) = (-1,1)$

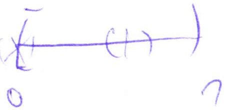
Def. Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je vnitřním bodem množiny A, jestliže existuje $r>0$ tak, že $B(x,r) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme vnitřkem A a značíme $\operatorname{int} A$.

Příklad: Co je vnitřek $[0,1)$ v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

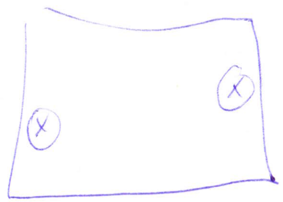
$(-1,1)^2$ $\quad Q(0,1)$ v $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$

$\mathbb{Q}$ v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$



$\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$



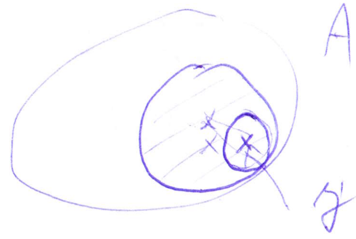
$\operatorname{int} Q(0,1) = Q(0,1)$

$\boxed{\text{Věta L 9.3}}$ (charakterisace vnitřku) Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom $\operatorname{int} A$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v A.

Důk. A otevřená $\Rightarrow$ $\operatorname{int} A = A$.

Dk: • int A je otevřená: Podle definice $\forall\, x \in \operatorname{int} A$

$\exists\, r>0 \quad B(x,r) \subset A$. Tvrdím, že $B(x,r) \subset \operatorname{int} A$



$\forall\, y \in B(x,r)$ zvolme $\tilde{r} = r - \rho(x,y)$.

Pak $B(y,\tilde{r}) \subset B(x,r) \subset A \Rightarrow y \in \operatorname{int} A$.

$\{\forall\, z \in B(y,\tilde{r}) : \rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < \tilde{r} + \rho(y,x) = r\}$

$\forall\, x \in \operatorname{int} A \ \exists\, r>0 \quad B(x,r) \subset \operatorname{int} A \Rightarrow \operatorname{int} A$ je otevřená.

• $\operatorname{int} A \subset A$ jasné $\underset{x \in \operatorname{int} A \Rightarrow}{} \{x\} \in B(x,r) \subset A \Rightarrow x \in A$.

• int A je největší ot. množina v A:

sporem. Nechť $\exists\, G$ otevřená $\quad \operatorname{int} A \subsetneq G \subset A$.

Pak $\exists\, x \in G \setminus \operatorname{int} A$

ale G je otevřená $\Rightarrow \exists\, r>0$

$B(x,r) \subset G \subset A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A$ ↯

$\square$

Definice Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je hraničním bodem M, jestliže $\forall r>0$ platí $M \cap B(x,r) \neq \emptyset$ a $(P\setminus M) \cap (B(x,r)) \neq \emptyset$.

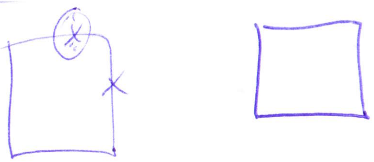
Množinu všech hraničních bodů M nazýváme hranicí M a značíme ji ∂M. Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad: Co je hranice a uzávěr $[0,1)$ v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\partial[0,1) = \{0,1\}$

$\overline{[0,1)} = [0,1]$

$(-1,1)^2 = Q(0,1)$ v $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$



$\overline{(-1,1)^2} = [-1,1]^2$

$\mathbb{Q}$ v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

(o1x) $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ $\quad\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Věta L 9.4 (uzávěr a uzavřené množiny). Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak A je uzavřená v P $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = A$.

Dk: "$\Rightarrow$" A uz $\Rightarrow P\setminus A$ je ot $\Rightarrow \forall x \in P\setminus A\ \exists r>0\ B(x,r) \subset P\setminus A$

$\Rightarrow x \notin \partial A \Rightarrow \partial A \subset A \Rightarrow \overline{A} = A \cup \partial A = A$.

"$\Leftarrow$" $A = \overline{A} = A \cup \partial A \Rightarrow \partial A \subset A \Rightarrow \underline{\forall x \in P\setminus A}\ x \notin \partial A$

$\Rightarrow \exists r>0\quad B(x,r) \cap A = \emptyset$ nebo $\underbrace{B(x,r) \cap (P\setminus A) = \emptyset}_{x \in\ x \in \text{ nelze}}$

$\Rightarrow B(x,r) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \subset P\setminus A \Rightarrow P\setminus A$ je ot $\Rightarrow$ A je ~~uz~~ uzavřená

Věta L9.5 (vlastnosti uzávěru) Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom platí (i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(ii) nechť $A \neq \emptyset$, pak $\overline{A} = \{x \in P : \rho(x,A) = 0\}$

$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, tedy $\overline{A}$ je uzavřená množina.

Dk: (i) nechť $x \in \overline{A} = A \cup \partial A$ $(\subset B \cup \partial A)$

Je-li $x \in B$, pak $x \in \overline{B} = B \cup \partial B$. ✓

Je-li $x \in \partial A$ a $x \notin B$, pak $\forall r>0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{A \subset B} B(x,r) \cap B \neq \emptyset$

a $\{x\} \in B(x,r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$ $\Rightarrow x \in \partial B \Rightarrow x \in \overline{B}$

(ii) Označme $M = \{x \in P :$ ~~$\rho(x,A)=0\}$~~ ~~dist~~ $\rho(x,A) = 0\}$ $(= \mathrm{dist}(x,A))$

M je uzavřená: Nechť $y \in P \setminus M$, pak $\rho(y,A) > 0$ $(= 2r)$

$(\Leftrightarrow P \setminus M$ je ot.$)$ Tedy $\exists r > 0$ $B(y,r) \cap A = \emptyset$

$B(y,\frac{r}{2})$

Tvrdím $B(y,\frac{r}{2}) \subset P \setminus M$: $\forall a \in A$ $\forall z \in B(y,\frac{r}{2})$, pak

$\rho(z,a) \geq \rho(y,a) - \rho(z,y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \xRightarrow{\inf_{a \in A}} z \in P \setminus M \Rightarrow B(y,\frac{r}{2}) \subset P \setminus M$

Tedy $\forall y \in P \setminus M$ $\exists r > 0$ $B(y,\frac{r}{2}) \subset P \setminus M \Rightarrow P \setminus M$ je ot. $\Rightarrow M$ je uz.

V9.4

Podle (i) $A \subset M \xRightarrow{(i)} \overline{A} \subset \overline{M} = M$.

Dokážeme opačnou inkluzi ($M \subset \bar{A}$)

Nechť $x \in P \setminus \bar{A}$ $\Rightarrow$ podle V 9.4. $\bar{A}$ je uzavřená, a tedy $P \setminus \bar{A}$ je otevřená

$\Rightarrow \exists r > 0 \quad \underbrace{B(x,r)}_{\subset P \setminus \bar{A}} \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{dist}(x, A) \geq r > 0 \Rightarrow x \notin M$

Z $P \setminus \bar{A} \subset P \setminus M \Rightarrow M \subset \bar{A}$

(iii) ~~Pro $A = \emptyset$ je $\bar{A} = \emptyset$ a tvrzení platí.~~

~~jinak podle (ii) $\bar{A} = M$ a $\bar{M} = M$ $\Rightarrow$~~

~~$\bar{\bar{A}} = \bar{M} = M = \bar{A}$~~

~~Podle V 9.4 $\bar{A}$ je uzavřená $\Rightarrow \bar{\bar{A}} = \bar{A}$~~

Pro $A = \emptyset$ je $\bar{A} = \emptyset$ a tvrzení platí.

jinak podle (ii) $\bar{A} = M$ a $\bar{M} = M$ (viz důkaz)

Tak $\bar{\bar{A}} = \bar{M} = M = \bar{A}$.

$(x) \in P \setminus M$

$\Rightarrow$

(x) $\exists B(x, \frac{r}{2}) \cap \partial M = \emptyset$

$\square$

$\underline{\partial M \subset M}$