Algebrou proti koronaviru X

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Cyklické grupy

1. Najděte všechny generátory grupy:

   (a) $\mathbb{Z}_{12}$ [1,5,7,11]

   (b) $\mathbb{Z}_7^*$ [3,5]

2. Hledali byste raději generátor grupy $\mathbb{Z}_{181}^*$, nebo grupy $\mathbb{Z}_{227}^*$?

3. Napište všechny podgrupy grupy. Jak jsou podgrupy uspořádány inkluzí?

   (a) $\mathbb{Z}$ [$k\mathbb{Z}$ pro $k \in \mathbb{Z}$]

   (b) $\mathbb{Z}_{18}$ [$k\mathbb{Z}_{18} = \langle k \rangle$ pro k, které dělí 18]

   (c) $\mathbb{Z}_{23}^*$ [$\mathbb{Z}_{23}^*, \langle 2 \rangle, \langle 22 \rangle, \{1\}$]

   (d) $\mathbb{Z}_{17}^*$ [$\langle 3^k \rangle$, kde k dělí 16]

4. Rozložte dané grupy na direktní součin co nejvíce netriviálních cyklických grup *(všimněte si, že Čínská věta 15.6 má užitečnou druhou část)*:

   (a) $\mathbb{Z}_{18}$ [např. $\langle 2 \rangle \times \langle 9 \rangle \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$]

   (b) $\mathbb{Z}_{29}^*$ [např. $\langle 12 \rangle \times \langle 16 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$]

   (c) $\mathbb{Z}_{21}^*$ [např. $\langle 8 \rangle \times \langle 10 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$]

   (d) $\mathbb{Z}_{30}^*$ [např. $\langle 21 \rangle \times \langle 25 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$]

5. Jaké jsou maximální možné řády prvků v grupách z předchozího cvičení? Pro odvážné: zkuste nějaké takové najít.

   [(a) 17; jakýkoli generátor (číslo nesoudělné s 18) (b) 28; jakýkoli generátor, např. 2 (c) 6; prvky 5, 17, 2, 19, 10, 11 (d) 4; prvky 7, 13, 23, 17]

6. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické:

   (a) $\mathbb{S}_3$ [ne]

   (b) $\mathbb{A}_3$ [ano]

   (c) $\mathbb{Z}_{12}^*$ [ne]

   (d) $\mathbb{Z}_{14}^*$ [ano]

7. Najděte všechny homomorfismy

   (a) ze $\mathbb{Z}_3$ do $\mathbb{Z}_5$ [jen triviální]

   (b) ze $\mathbb{Z}_6$ do $\mathbb{Z}_{15}$ [$a \mapsto ka \pmod{15}$ pro $k \in \{0, 5, 10\}$]

   (c) ze $\mathbb{Z}_{15}$ do $\mathbb{Z}_6$ [$a \mapsto ka \pmod 6$ pro $k \in \{0, 2, 4\}$]

8. Dokažte, že grupy $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nejsou izomorfní.

9. Buď $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$. Najděte generátor grupy T^*. Kolik má tato grupa generátorů celkem? [celkem $\varphi(8) = 4$ generátory; jeden z nich je např. $\alpha + 1$]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

10.* Pro jaké m a n je grupa $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ cyklická? [pro m, n nesoudělná]

11.* Určete počet všech homomorfismů ze $\mathbb{Z}_m$ do $\mathbb{Z}_n$. (*Může se hodit Tvrzení 16.5.*) [NSD(m, n)]

12.* Ukažte, že pro komutativní okruh R nemůže mít grupa R^* pět prvků.