9 Metrické prostory I

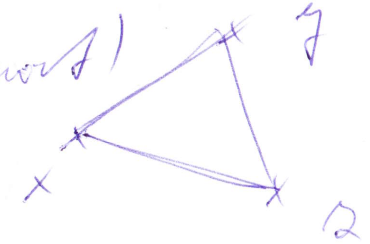
9.1. Základní pojmy

Definice Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P,ρ), kde P je množina bodů a $\rho: P\times P \to \mathbb{R}$ splňuje

(i) $\forall x,y\in P : \rho(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $\forall x,y\in P : \rho(x,y)=\rho(y,x)$, symetrie

(iii) $\forall x,y,z\in P : \rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z)$ (Δ-nerovnost)



Funkce ρ se nazývá metrika

Pozn: 1) pro další úvahy $P\subset\mathbb{R}^n$, ρ = euklidovská vzdálenost

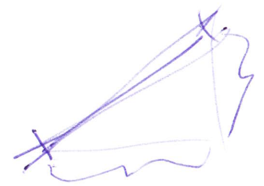
2) $\rho : \cancel{R\times R} \, P\times P \to [0,\infty)$

(iii) $x=z$, y $\qquad 0 \overset{(i)}{=} \rho(x,x) \le \rho(x,y)+\rho(y,x) \overset{(ii)}{=} 2\cdot \rho(x,y)$

Příklady: 1) Euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$:

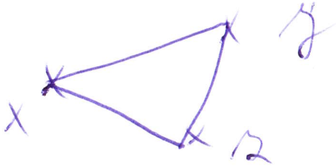
pro $x,y\in\mathbb{R}^n$ definujeme $\rho_e(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

$x = [x_1,\dots,x_n]$



(i) zřejmé (ii) zřejmé $\sqrt{\sum (y_i-x_i)^2}$

(iii)



Cauchyova nerovnost: $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dk: $a_i = 0 \ \forall i \Rightarrow$ jasné. Jinak $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$.

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \cdot x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Kvadr. funkce, nezáporná $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0 \Rightarrow$ má nejvýše 1 kořen

$$\Rightarrow 0 \ge D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \qquad \square$$

Δ ner. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ $\quad \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}$$

Označme $a_i = x_i - y_i$ $\quad b_i = (y_i - z_i)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad /^2$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \le \cancel{\sum a_i^2} + 2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

plyne z Cauchyova nerovnost

Příklady m. p. 2) maximová metrika na $\mathbb{R}^n$

25 - 3

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

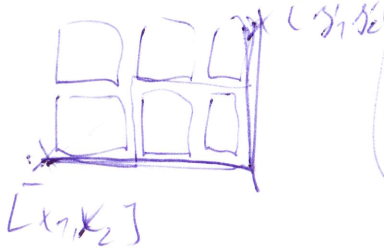
(i) ✓ (ii)

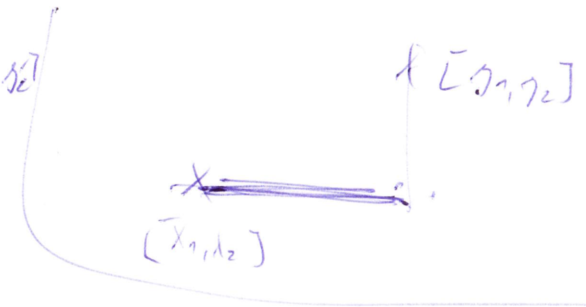
$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

$/ \max_{i=1,\dots,n}$ (iii) ✓

3) součtová metrika na $\mathbb{R}^n$:

definujeme $\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$





(i) ✓ (ii) ✓

(iii) $\sum_{i=1}^{n}$ ✓

4) diskrétní metrika na libovolné množině P je definována

$\rho(x,x) = 0$

(i), (ii) (iii) snadno

$\rho(x,y) = 1$ pro $x \ne y$.

(iii) rozbor případů $x \ne z$ $1 \le 1 + 1$

7) prostor obrázků

$Obr = \{ x \in \mathbb{R}^{1280 \times 1024} : x_i \in [0,1] \}$

8) crokaž

„metrika na odpovědích"

$|x - y| = \rho_2(x,y)$

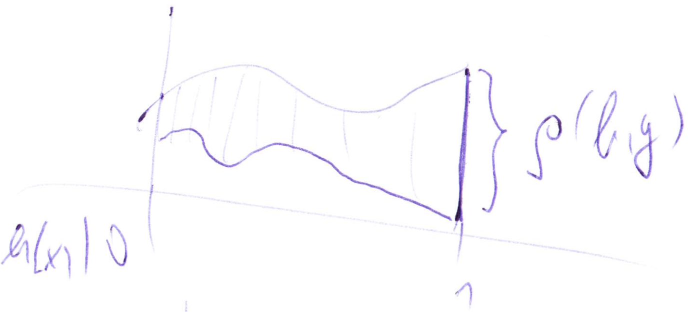
aplikace: komprese dat

odstranění šumu

shluková analýza

5) Supremová metrika na $C([0,1])$. $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ spojité $\boxed{25-4}$

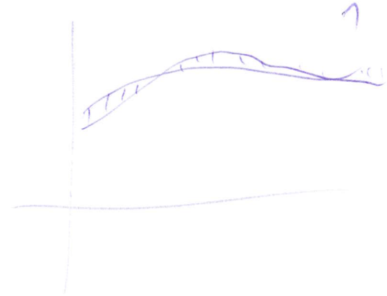
$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \in \mathbb{R}$$



(i) ✓ (ii) ✓ (iii)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$

$\sup\limits_{x\in[0,1]}$: $\rho(f,h) \le \rho(f,g) + \rho(g,h)$



$\sup(|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|)$

$\le \sup|f(x)+g(x)| + \sup|g(x)-h(x)|$

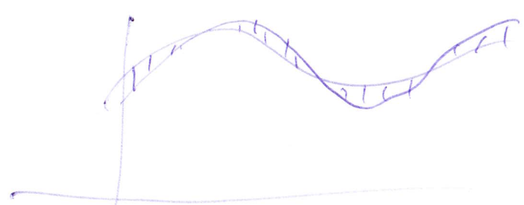
6) L^1-metrika na spojitých funkciách $P = C([0,1])$

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

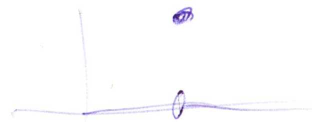
(i) ✓ (ii) ✓

(iii) $\forall x\in\mathbb{R}$

$|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$ $\Big/ \int_0^1$



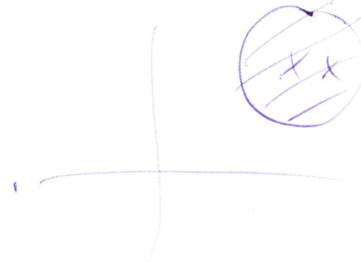
$\rho_1(f,h) \le \rho_1(f,g) + \rho_1(g,h)$



Definice Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$.

Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

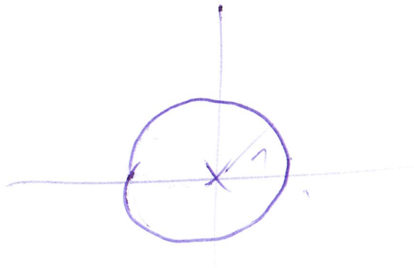
$$B(x,r) = \{y \in P : \rho(x,y) < r\}.$$



Uzavřenou koulí nazveme $\overline{B(x,r)} = \{y \in P : \rho(x,y) \le r\}$.

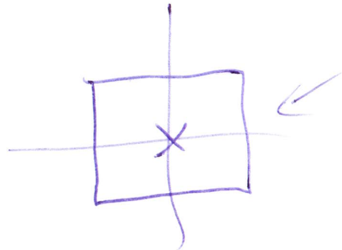
Příklady: 1) $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ $\qquad B(0,1)$

$B([0,0],1)$



2) $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ $\qquad B(0,1)$

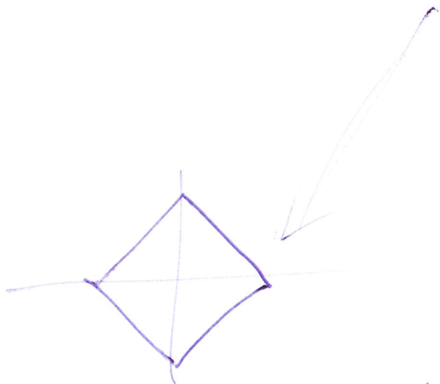
$\max_{i=1,2} |0 - y_i| < 1$



TOTO JE KOULE

3) $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ $\qquad B(0,1)$

$|0-y_1| + |0-y_2| < 1$



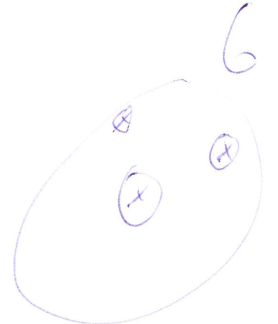
4) diskrétní m. p. $\qquad \rho(x,x) = 0$

$\rho(x,y) = 1 \quad x \neq y$

$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$

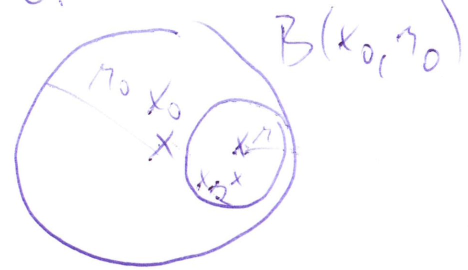
$B(x, 2) = P$

Def. Nechť (P,ρ) je metrický prostor. ~~Řekne~~ Řekneme, že množina $G \subset P$ je otevřená (v (P,ρ)), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r>0$, že $B(x,r) \subset G$.
Řekneme, že množina $F \subset P$ je uzavřená (v (P,ρ)), pokud je $P \setminus F$ otevřená.



Poznámka: 1) Otevřená koule je otevřená množina.

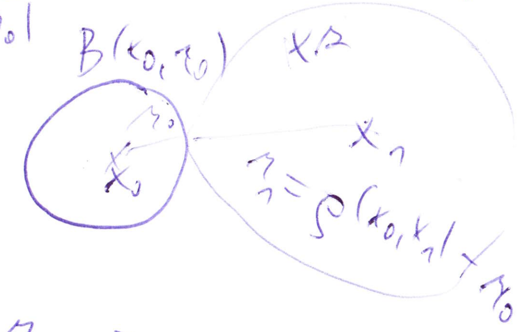
Nechť $x_0 \in P$, $r_0 > 0$. Chceme $B(x_0,r_0)$ otevřená.
Nechť $x \in B(x_0,r_0)$, položme $r = r_0 - \rho(x,x_0)$.
Tvrdím $B(x,r) \subset B(x_0,r_0)$:



$$\forall z \in B(x,r):\ \rho(x_0,z) \overset{\Delta\text{-ner}}{\leq} \rho(x_0,x)+\rho(x,z) < \rho(x_0,x)+r = \rho(x_0,x)+r_0-\rho(x,x_0) = r_0 \checkmark$$

2) uzavřená koule je uzavřená množina $\Leftrightarrow P \setminus \overline{B}(x_0,r_0)$ je ot.

Nechť $x_1 \in P \setminus \overline{B}(x_0,r_0)$, položme $r_1 = \rho(x_0,x_1) - r_0 > 0$



Tvrdím $B(x_1,r_1) \subset P \setminus \overline{B}(x_0,r_0)$ ($\Rightarrow \overline{B}(x_0,r_0)$ je uz.)

$$z \in B(x_1,r_1):\ \rho(x_0,z) \underset{\Delta\text{-ner}}{\geq} \rho(x_0,x_1) - \underbrace{\rho(x_1,z)}_{(<r_1)} > \rho(x_0,x_1) - r_1 =$$
$$= \rho(x_0,x_1) - (\rho(x_0,x_1) - r_0) = r_0$$

3) Quiz: Je $[0,1]$ otevřená v $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou?

$\boxed{\text{Věta 29.1}}$ (vlastnosti otevřených množin). Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Pak

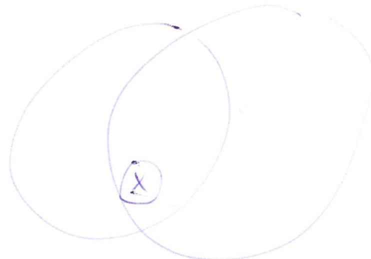
(i) $\emptyset$ a P jsou otevřené

(ii) Jsou-li $G_1, \dots, G_n$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ je otevřená.

(iii) Nechť A je libovolná (i nekonečná) indexová množina. Jsou-li G_α, $\alpha \in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

Dk: (i) zřejmé P.. vol vždy $r = 1$. $B(x,1) \subset P$

(ii) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, $x \in G_i$ a G_i otevřená



$\Rightarrow \exists r_i > 0 \quad B(x, r_i) \subset G_i$.

Zvolme $r = \min_{i=1,\dots,n} r_i$.

Pak $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset G_i \ \forall i \Rightarrow B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ot

(iii) $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in A \quad x \in G_{\alpha_0}$ a ta je otevřená $\Rightarrow \exists r > 0 \quad B(x,r) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je ot $\square$

$\boxed{\text{Věta 19.2}}$ (vlastnosti uzavřených množin)

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak

(i) $\emptyset$ a P jsou uzavřené

(ii) $F_1, \dots, F_n$ uzavřené $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ je uzavřená

(iii) Jsou-li F_α, $\alpha \in A$ uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uz.

~~Def.~~ Příklad: 1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) = \{0\}$ není otevřená v $\mathbb{R}$

2. $\bigcup_{i=2}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right] = (0,1)$ není uzavřená v $\mathbb{R}$

$[a,b] = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$