VARIACE KONSTANT

Lineární rovnice 1. řádu – opakování

$x' + p(t)x = q(t) \quad (*)$

1. $x' + p(t) \cdot x = 0 \rightsquigarrow$ řešení $c \cdot x_1(t)$

2. Variace konstant: uvažujeme funkci $c(t) \cdot x_1(t)$ a tu dosadíme do rovnice $(*)$

Pro rovnice vyšších řádů

$$\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = q(t) \qquad (**)}$$

1. Fundamentální systém $y_1, \ldots, y_n$

2. hledáme partikulární řešení … pokud q nemá speciální tvar, použijeme variaci konstant.

$$\boxed{y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) + \ldots + C_n(t)y_n(t)}$$

dosadíme do rovnice $(**)$

potřebuji spočítat $y', y'', \ldots, y^{(n)}$

$$y'(t) = \underbrace{C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n}_{\text{položím } = 0} + C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n'$$

$$y''(t) = \underbrace{C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n'}_{\text{položím } = 0} + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''$$

$$y'''(t) = \qquad \vdots$$

$\vdots$

$$y^{(n-1)}(t) = \underbrace{C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)}}_{=0} + C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)}(t) = C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} + C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}$$

Dosadím do (**):

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = q(t) \qquad (**)$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} + c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)}$$

$$+ a_{n-1}\left(c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}\right)$$

$$\vdots$$

$$+ a_1\left(c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'\right)$$

$$+ a_0\left(\underbrace{c_1 y_1}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{c_n y_n}_{=0}\right) = q(t)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = q(t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{array}}$$

Pro řešení dostáváme soustavu n lineárních algebraických rovnic pro n neznámých čísel $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ .. ty vyřešíme

pak zintegrujeme a dostaneme $c_1(t), \dots, c_n(t)$.

Př: $$y'' + y = \frac{1}{\cos t}$$

1. $y'' + y = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$

F.S. $\underset{y_1}{\cos t}, \underset{y_2}{\sin t}$

2. $y = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$

modří ověřovaná soustava:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{1}{\cos t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= 0 \\ c_1'(-\sin t) + c_2' \cos t &= \frac{1}{\cos t} \end{aligned}}$$

I. $\cos t$ − II. $\sin t$

$$c_1'(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}) = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} \qquad / \int$$

$$\boxed{c_1(t) = \ln|\cos t|}$$ (integrační konstanta mě nezajímá)

I. rce: $-\frac{\sin t}{\cancel{\cos t}} \cdot \cancel{\cos t} + c_2' \sin t = 0$

$$c_2' - 1 = 0 \qquad c_2' = 1$$

$$\boxed{c_2(t) = t}$$

partikulární řešení:

$$y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \ln|\cos t| \cdot \cos t + t \cdot \sin t$$

na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

všechna řešení jsou:

$$\underline{\underline{y(t) = c\cdot\cos t + d\sin t + \ln|\cos t|\cos t + t\sin t}}$$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

- Lze aplikovat při řešení soustav lineárních rovnic s konstantními koeficienty

- Lze aplikovat na lineární rovnice vyšších řádů s nekonstantními koeficienty (pokud ovšem známe fundamentální systém)

Př: $y''' + 3t\, y'' + t^2 y' + \cos t\; y = t \cdot \sin t$