ApDR – 11. PŘEDNÁŠKA

MINULE: $x_i' = \alpha_i x_i \quad , \alpha_i = e^i A x - x A x \qquad$ (RD)

VĚTA (ZEEMAN '79): Pokud nemají všechny souřadnice vektoru $(\mathrm{Adj}\,A)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ stejná znaménka, pak ve vnitřku Δ není stacionární bod (RD) ani periodický orbit.

TVRZENÍ: 1. $\tilde{x} \in \mathrm{Int}\,\Delta$ je stacionární bod $\Leftrightarrow$ $e^i A \tilde{x}$ nezávisí na $i \in \{1, \dots, n\}$

2. Jestliže má (RD) ve vnitřku Δ periodický orbit, pak má ve vnitřku Δ stacionární bod.

$\mathrm{Adj}\,A = \left((-1)^{i+j} M_{ji}\right)$ kde M_{ij} je determinant matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Dk VĚTY: Dle Tvrzení část 2. stačí dokázat, že ve vnitřku Δ není stacionární bod. Sporem. Předpokládejme, že $\tilde{x} \in \mathrm{Int}\,\Delta$ je stacionární. Dle 1. části Tvrzení je $e^i A \tilde{x} = \alpha \;\; \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \underline{A\tilde{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}$ $(*)$

označme $u = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

klíčový fakt: $A \cdot \mathrm{Adj}\,A = \mathrm{Adj}\,A \cdot A = \det A \cdot I$ (z LA) $(**)$

Rozlišme 2 případy:

1. A regulární: $(**) \Rightarrow \mathrm{Adj}\,A = A^{-1} \det A \cdot I = A^{-1} \det A$

$$\underbrace{\tilde{x}}_{x_i > 0\, \forall i} = A^{-1} A \tilde{x} = \left(\frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj}\,A\right) \underbrace{A\tilde{x}}_{\alpha \cdot u} = \underbrace{\frac{1}{\det A} \cdot \alpha}_{\text{číslo}} \cdot \underbrace{\mathrm{Adj}\,A \cdot u}_{\text{nemá všechna znaménka stejná}}$$

SPOR

2. A není regulární. $\mathrm{Adj}\,A\,u$ nemá stejná znaménka, spec. je to nenulový vektor, $\mathrm{Adj}\,A\,u \neq o$.
Pak $\mathrm{Adj}\,A \neq O$.

$$\Rightarrow M_{ij} \neq 0 \Rightarrow h(A) = n-1 \Rightarrow$$

$\dim \ker A = 1$.

2a) $\alpha \neq 0$: $\mathrm{Adj}\,A \cdot A\tilde{x} = \underbrace{\det A}_{=0} \cdot I \cdot \tilde{x} = o$

$$\mathrm{Adj}\,A\ \alpha \cdot u \quad , \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Adj}\,A\,u = o$$

spor s tím, že nemá všechna znaménka stejná

2b) $\alpha = 0$ $\quad A\tilde{x} = \alpha \cdot u = o \Rightarrow \underline{\tilde{x} \in \ker A}$

$$A \cdot \mathrm{Adj}\,A\,u = \underbrace{\det A}_{=0} \cdot I \cdot u = o$$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Adj}\,A \cdot u} \in \ker A$

$$\Rightarrow \mathrm{Adj}\,A\,u = \beta \cdot \tilde{x}$$

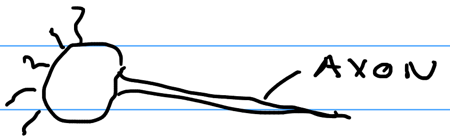
nemá znaménka stejná $\qquad$ ↳ má kladné souř.

SPOR

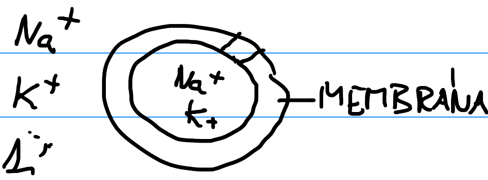
□

IV. MODELY NERVOVÉHO IMPULSU

Neuron



PRŮŘEZ AXONU



jak funguje vznik impulsu

Rozdíly v koncentraci vytváří napětí na membráně … klidové napětí $\sim -70\,mV$

- při malé poruše napětí se výkyv utlumí ⤳ návrat do klidového stavu
- při větší poruše napětí se začnou otevírat kanálky v membráně umožňující přenos iontů Na_+ ⤳ dojde k nárůstu napětí ⤳ excitace směrem dovnitř

Poté se aktivují kanálky umožňující vynos K_+ ven z buňky $\rightarrow$ normalizace napětí.

Hodgkin – Huxley '52

$$\boxed{(1) \quad C_m E' = g_{Na}(E - E_{Na}) + g_k (E - E_k) + g_e (E - E_e) - I(t)}$$

C_m ... kapacita membrány

E ... napětí na membráně (závisí na čase t)
E_{Na}, E_k, E_e ... klidová napětí příslušná Na^+, K^+, ostatní

I ... vnější proud
g_{Na}, g_k, g_e ... vodivosti přísl. Na^+, k^+, ostatní

g_{Na}, g_k ... závisí na čase, na E, g_e konst.

Jak závisí g_{Na}, g_k na E?

$$g_k = \bar{g}_k \cdot n(t)^4, \quad g_{Na} = \bar{g}_{Na} \cdot m^3(t) \cdot h(t) \qquad (*)$$

$\bar{g}_k, \bar{g}_{Na}$ maximální vodivosti (známé kladné konstanty)

n, m, h funkce s hodnotami v $[0,1]$

$$\boxed{\begin{aligned}
&(2) \quad m' = \alpha_m(E)\cdot(1-m) - \beta_m(E)m \\
&(3) \quad n' = \alpha_n(E)(1-n) - \beta_n(E)n \\
&(4) \quad h' = \alpha_h(E)(1-h) - \beta_h(E)h
\end{aligned}}$$

$\alpha_m, \alpha_n, \alpha_h$
$\beta_m, \beta_n, \beta_h$
známé funkce,

autoři model je určili na základě experimentů.
$\rightarrow$ model (numerická řešení) odpovídal kvalitativně i kvantitativně experimentům.

Dva jevy – excitace systému
– pokud $I > 0$ je konstantní, byly pozorovány periodicky se opakující vzruchy.

Jiný (zjednodušený model): FitzHugh – Nagumo

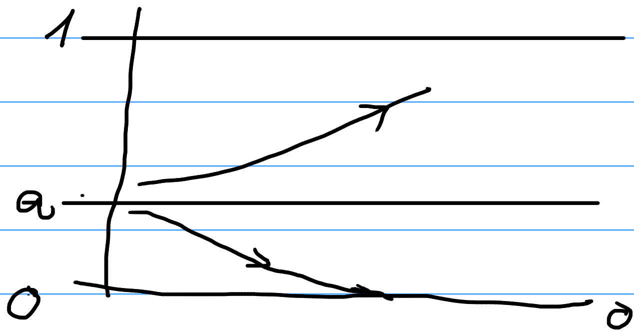
$$\boxed{(F\text{-}N)\quad \begin{aligned} u' &= u(1-u)(u-a) - w + I(t) \\ w' &= bu - \gamma w \end{aligned}}$$

$b, \gamma > 0$, $a \in (0,1)$
I vnější proud

(založený na Van Der Polově rovnici)

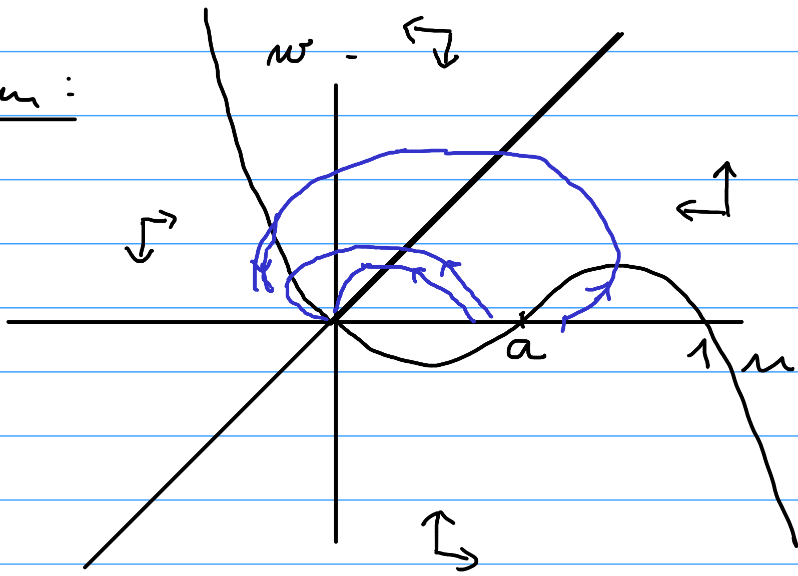
u ... odpovídá napětí E v H-H modelu
w ... tlumící veličině n v H-H modelu

Uvažujme rovnici $y' = y(1-y)(y-a)$



kvalitativní analýza
a ... mezní hodnota
$y(0) < a$ ... dojde k utlumení
$y(0) > a$ ... dojde k excitaci

Excitace F-N systému:



kvalitativní analýza
$I \equiv 0$

stac. body:
$w = u(1-u)(u-a)$
$bu = \gamma w$

a je mezní hodnota, nad ní dochází k excitaci systému. ✓

Počátek je lokální atraktor (asymptoticky stabilní)

Linearizace: $\nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix} = A$

$$\det(\lambda - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda + a & 1 \\ -b & \lambda+\gamma \end{pmatrix} = (\lambda+a)(\lambda+\gamma) + b$$

$$= \lambda^2 + (a+\gamma)\lambda + b + a\gamma$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+\gamma) \pm \sqrt{(a+\gamma)^2 - 4(b+a\gamma)}}{2}$$

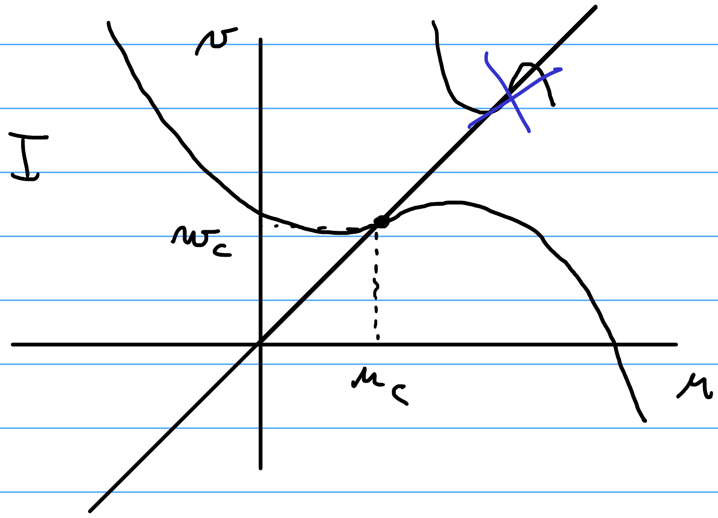
$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0 \implies$ počátek je asymptoticky stabilní!

Existence periodických řešení při konstantním kladném proudu I.

kvalitativní analýza:

$$v = u(1-u)(u-a) + I$$

$$v = \frac{b}{\gamma} \cdot u$$



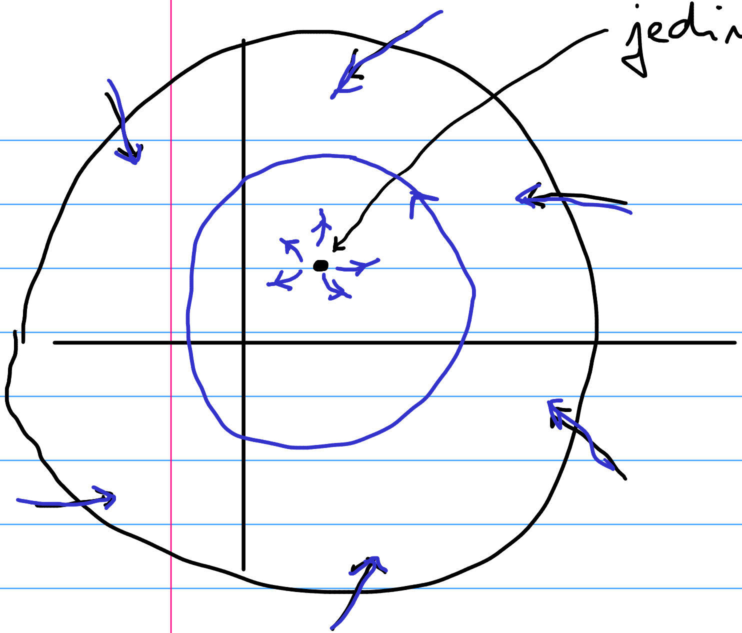
existuje právě jeden stacionární bod

Předpokládejme ↑

Ukážeme, že

- tento stacionární bod je „zdroj“ … obě vlastní čísla mají kladnou reálnou část … tj. všechna řešení jdou od něj pryč.
- velký kruh je positivně invariantní množina, tj. žádné řešení ho neopustí

Pak z Poincaré-Bendixsonovy věty bude plynout existence periodického řešení



Pak nutně existuje periodické řešení.

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$$

Poincarého-Bendixsonova věta: Je-li řešení u rovnice $u' = f(u)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ omezené a def. na $(0,+\infty)$, pak
- buď existuje stacionární bod $\tilde{x}$ a posl. časů $t_n \to +\infty$, že $\lim_{n\to\infty} u(t_n) = \tilde{x}$
- nebo existuje periodické řešení $\tilde{u}$ a $\Gamma = \{\tilde{u}(t), t \in \mathbb{R}\}$, že $\operatorname{dist}(u(t), \Gamma) \to 0$ pro $t \to +\infty$.

- Ověříme, že linearizace v bodě (u_c, w_c) má obě vlastní čísla s kladnou reálnou částí

$$DF(u_c, w_c) = \begin{pmatrix} f'(u_c) & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix} \qquad f(u) = u(1-u)(u-a)$$

$$F(u,w) = \begin{pmatrix} f(u) - w \\ bu - \gamma w \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - f'(u_c) & 1 \\ -b & \lambda + \gamma \end{pmatrix} = (\lambda - f'(u_c))(\lambda + \gamma) + b =$$

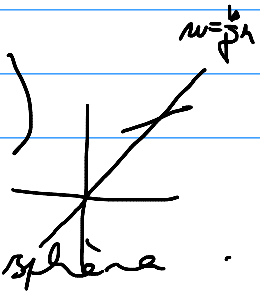
$$\lambda^2 + \lambda(\gamma - f'(u_c)) - f'(u_c)\gamma + b = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\gamma - f'(u_c)) \pm \sqrt{(\gamma - f'(u_c))^2 - 4(b - f'(u_c)\gamma)}}{2}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0 \iff \left(\gamma < f'(u_c) \ \&\ b - f'(u_c)\gamma > 0\right)$$

$\Updownarrow$

$\exists!$ stacionární bod $\Rightarrow f'(u_c) < \frac{b}{\gamma}$ je splněna.



Za předpokladů $\exists!$ stac. bod

a $f'(x_c) > \gamma$

platí $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$.