$y' = A \cdot y + b(x)$

Def Nechť $y^1, y^2, \dots, y^n$ tvoří fundamentální systém řešení $y' = A \cdot y$. Pak matici
$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$
nazýváme fundamentální matici soustavy $y' = A \cdot y$

(Pak $\varphi'(x) = A \cdot \varphi(x)$ – v 1. sloupci $(y^1)' = A \cdot y^1$ atd)

Lemma Nechť φ je fundamentální matice soustavy $y' = A \cdot y$ na intervalu I. Pak $\varphi(x)$ je regulární pro každé $x \in I$.

Dk: Sporem. Nechť $\exists c_i \in \mathbb{R}$ a $\exists x_0 \in I$
$$c_1 \cdot y^1(x_0) + \dots + c_n \cdot y^n(x_0) = 0.$$
Podle věty 8.5 (o existenci řešení systému ODR 1. řádu) $\exists!$ řešení $y' = A \cdot y$ splňující $y(x_0) = 0$. Toto řešení je $y \equiv 0$.

Ale i funkce $y(x) = c_1 \cdot y^1(x) + \dots + c_n \cdot y^n(x)$ je řešení a splňuje $y(x_0) = 0$.

Z jednoznačnosti $c_1 \cdot y^1(x) + \dots + c_n y^n(x) \equiv 0 \Rightarrow$ spor s lineární nezávislostí $y^1, \dots, y^n$ $\square$

Kramerovo pravidlo: $A^{-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ matice bez i-tého řádku a j-tého sloupce
$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})}{\det A}$$

$\varphi^{-1}(x)$ je spojitá funkce

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(\varphi(x)_{ij})}{\det(\varphi(x))}$$

Věta 8.10 (Tvar řešení pro soustavu ODR)

Nechť I je interval, $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $b: I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar

$$y(x) = \varphi(x)\cdot\varphi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \varphi(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt,$$

kde φ je fundamentální matice soustavy.

Důkaz: Z Lemmatu víme, že $\varphi(x)$ je regulární $\forall x \in I$. Díky Kramerově pravidlu je $t \to \varphi^{-1}(t)$ spojitá, tedy $\int_{x_0}^{x}\varphi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt$ má smysl.

Označme $y(x) = \varphi(x)\cdot\varphi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \varphi(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt$.

Podle věty o derivaci podle horní meze (V 7.9) dostaneme

$$y'(x) = \underset{A\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x)}\cdot\varphi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \underset{A\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x)}\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt + \underbrace{\varphi(x)\cdot\varphi^{-1}(x)}_{I}\cdot b(x) =$$

$$= A\cdot\left(\varphi(x)\cdot\varphi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \varphi(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi^{-1}(t)\,b(t)\,dt\right) + b(x) = A\cdot y(x) + b(x)$$

Snadno $y(x_0) = \varphi(x_0)\cdot\varphi^{-1}(x_0)\cdot y^0 + \varphi(x_0)\cdot\int_{x_0}^{x_0} = y^0$.

$\square$

Z věty 8.5 víme jednoznačnost řešení

Jako důsledek tohoto tvrzení lze odvodit Věta 8.8. i následující: 24 - 3

Věta T8.11 (o speciální pravé straně pro soustavu n-tého řádu - BD)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice a p, q jsou $n \times 1$ vektory polynomů.

Pak soustava $y' = A \cdot y + p(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + q(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$

má řešení ve tvaru

$$y(x) = \tilde{p}(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \tilde{q}(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx,$$

kde $\tilde{p}, \tilde{q}$ jsou vektory polynomů a

$\max\{st\,\tilde{p}, st\,\tilde{q}\} = \max\{st\,p, st\,q\} +$ násobnost $(a+ib)$ jako vlastního čísla A.

Poznámka: není-li pravá strana ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \cdot y_i(x)$, kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y' = A \cdot y$.

Příklad: 4 $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y$ $a_{ii}-1$ $\lambda_{1,2,3} = 1$

$(A-\lambda I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = 0$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

obecný vlastní vektor $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

hledáme pokračující vlastní vektor $(A-\lambda I)\cdot u = \alpha v_1 + \beta \cdot v_2$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ tato má řešení $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta = -\beta$

$2\cdot(\alpha+\beta) = \alpha$

volím $\alpha = 2,\ \beta = -1$

řešení je $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

Řešení je $y(x) = C_1 \cdot e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_3 \cdot \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ na $\mathbb{R}$

pro $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

5. $y' = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \cdot y + \begin{bmatrix}2e^x\\2\sin x\end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2-1 = (\lambda-1)\cdot(\lambda-3)$ $\quad$ 24-5.

a) $\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix} \cdot v_2 = 0 \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

homogenní řeš. $\quad c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot e^x + c_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot e^{3x}$

b) $y' = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \cdot e^x + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \cdot \sin x$ $\quad$ součet 2 spec. pravých stran

b1) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \cdot \sin x$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 0$, $q = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\deg q = 0$ $\quad a + ib = i$ není kořen char. polynomu

$\Rightarrow \deg \tilde{p}, \deg \tilde{q} = 0 \Rightarrow \exists$ řešení $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot e^0 \cdot \cos x + \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \cdot e^0 \cdot \sin x = \begin{pmatrix}a\cos x + c\sin x\\b\cos x + d\sin x\end{pmatrix}$

$y' = \begin{pmatrix}-a\sin x + c\cos x\\-b\sin x + d\cos x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\cos x + c\sin x\\b\cos x + d\sin x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\sin x\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-a = 2c + d & -b = c + 2d + 2\\ c = 2a + b & d = a + 2b\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 = \begin{pmatrix}-\sin x\\-\cos x + 2\sin x\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 1. řádek $\quad -a\sin x + c\cos x = 2a\cos x + 2c\sin x + b\cos x + d\sin x \quad = 0$

2. řádek $\quad -b\sin x + d\cos x = a\cdot\cos x + c\sin x + 2b\cos x + 2d\sin x + 2\sin x$

$\boxed{24-6}$

b2) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \end{pmatrix}$, $a = 1$, $b = 0$, $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q = 0$

$a + ib = 1$ je 1-násobný kořen

$\Rightarrow \operatorname{st} \tilde{p} = \operatorname{st} \tilde{q} = 0 + 1$

Podle věty $\exists$ řešení $y(x) = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} \cdot e^x \cdot \cos 0 + \cancel{\ \sin 0} = \begin{pmatrix} (ax+b) \cdot e^x \\ (cx+d) \cdot e^x \end{pmatrix}$

$y' = \begin{pmatrix} (ax+b) \cdot e^x + a e^x \\ (cx+d) \cdot e^x + c e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (ax+b) \cdot e^x \\ (cx+d) \cdot e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \end{pmatrix}$

1. řádek: $(ax+b) e^x + a \cdot e^x = 2 \cdot (ax+b) \cdot e^x + (cx+d) \cdot e^x + 2 \cdot e^x$

e^x: $b + a = 2b + d + 2$

$x \cdot e^x$: $a = 2a + c$

2. řádek: $(cx+d) \cdot e^x + c \cdot e^x = (ax+b) \cdot e^x + 2 \cdot (cx+d) \cdot e^x$

$x \cdot e^x$: $c = a + 2c$

e^x: $d + c = b + 2d$

$\Big\}$ y_2: $\begin{pmatrix} x-1 \\ -x \end{pmatrix} \cdot e^x$ je řešení

celkem

$y(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}}_{y_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} x-1 \\ -x \end{pmatrix} \cdot e^x}_{y_2}$ na $\mathbb{R}$ pro $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$