

# Desáté cvičení

Matej Lieskovský

Ačkoliv tyto úkoly jde vyřešit třeba pomocí kostky, tužky a papíru, práci si můžete hodně usnadnit pomocí programování. V Pythonu vás budou nejspíše zajímat funkce `random.random()`, která vrací náhodný float  $0 \leq x < 1$ , a `random.randrange(k)`, která vrací náhodné celé číslo  $0 \leq x < k$ . Podobné generátory existují i v ostatních jazycích. Vyberte si jazyk který je vám pohodlný a najděte odpovídající generátory náhodných čísel. (Generátory nemusí být kryptograficky bezpečné.)

**1** Statistiku naměřených dat označujeme jako nestranný odhad parametru náhodného rozdělení právě pokud se střední hodnota statistiky rovná skutečné hodnotě parametru.<sup>1</sup> Z linearity střední hodnoty víme, že průměr dat je nestranný odhad střední hodnoty rozdělení.

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} n \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i)$$

Ověřte, že tohle funguje pro několik různých nastavení náhodných generátorů: Vyberte si generátor náhodných čísel a  $n$ , proveďte několik měření a sledujte, že průměr bude blízko střední hodnoty.

Všimněte si, že pro velká  $n$  bude průměr naměřených dat nejen mít střední hodnotu rovnou střední hodnotě generátoru, ale taky bude mít malý rozptyl. Viz zákon velkých čísel.

**2** Experimentálně “zjistěte”, že tohle funguje i pro druhý a vyšší moment. Dokažte, že to není náhoda.

**3** Na přednášce jste taky viděli, že  $\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$  není nestranný odhad rozptylu. Zkuste si, že tento postup skutečně podhodnocuje skutečný rozptyl. Jedná se ale o asymptoticky nestranný odhad, takže to především chcete zkusit pro menší hodnoty  $n$ .

**4** Vyzkoušejte a pak dokažte, že  $\frac{1}{n-2} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$  taky není nestranný odhad rozptylu.

Hint: Asymptoticky je tento odhad taky nestranný, ale třeba pro  $n = 3$  a vhodné vybraný generátor náhodných čísel by mělo být zjevné, že to není nestranné.

---

<sup>1</sup>Ujistěte se, že vám je jasná terminologie této věty.