Diskrétní náhodné veličiny

Definice: *Diskrétní (celočíselná) náhodná veličina* je funkce X definovaná na Ω s hodnotami v $\mathbb{Z}$, která pro každé $k \in \mathbb{Z}$ splňuje

$$X^{-1}(k) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\} \in \mathcal{A}.$$

Pravděpodobnosti $p_k = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) = \mathbb{P}(X = k)$ určují *rozdělení pravděpodobnosti* celočíselné náhodné veličiny X.

Poznámka: Pokud $X(\omega) \neq k$ pro všechna $\omega \in \Omega$, je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\} = \emptyset$, což je vždy prvek $\mathcal{A}$, a je $p_k = 0$. Pravděpodobnosti $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ jsou nezáporné a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1$.

Příklad – házení mincí

Uvažujme dva hody mincí. Potom $\Omega = \{LL, LR, RL, RR\}$ a náhodná veličina, která označuje počet líců, je dána jako $X(LL) = 2$, $X(LR) = 1$, $X(RL) = 1$, $X(RR) = 0$.

Podle klasické pravděpodobnosti zřejmě $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ a $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$.

Jak musí být zvolena σ-algebra $\mathcal{A}$?

Hlasovací otázka 9

Pro celočíselnou náhodnou veličinu X platí:
$X^{-1}(k) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\} \in \mathcal{A}$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Buď $\Omega = \{a, b, c, d\}$ a $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$.
Které z následujících zobrazení jsou (celočíselné) náhodné veličiny?

A) $X_1(a) = 0, X_1(b) = 0, X_1(c) = 0, X_1(d) = 0,$

B) $X_2(a) = 0, X_2(b) = 0, X_2(c) = 1, X_2(d) = 1,$

C) $X_3(a) = 0, X_3(b) = 1, X_3(c) = 1, X_3(d) = 1,$

D) $X_4(a) = 0, X_4(b) = 1, X_4(c) = 2, X_4(d) = 3,$

E) $X_5(a) = 0, X_5(b) = 1, X_5(c) = 0, X_5(d) = 1.$

Úloha 11.1 (placení obědů)

Skupina m lidí chodí společně na oběd. Po jídle se náhodně určí jeden z nich, kdo to za všechny zaplatí.

Jaká je pravděpodobnost, že se při k-tém obědě prvně přihodí, že někdo bude muset platit podruhé?

Úloha 11.2 (počítání úspěchů)

Posloupnost nezávislých pokusů, z nichž v každém může nastat úspěch s pravděpodobností p a neúspěch s pravděpodobností $q = 1 - p$, se nazývá posloupnost *bernoulliovských pokusů*. Pojmenování odkazuje na Jacoba Bernoulliho (1655–1705).

Uvažujme n nezávislých experimentů s pravděpodobností úspěchu p. Označme X počet úspěchů v této sérii. Určete rozdělení náhodné veličiny X, tedy hodnoty $\mathbb{P}(X = k)$ pro všechny relevantní hodnoty k.

Binomické rozdělení

Binomické rozdělení má náhodná veličina X, která udává celkový počet úspěchů v n bernoulliovských pokusech.

Platí $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$. Často zkracujeme jako $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$.

Úloha 11.3 (cestující necestující)

Určitý let má kapacitu 150 pasažérů. Letecká společnost se chrání proti tomu, že někteří pasažéři se nedostaví k letu, tím, že letadlo přeobsadí. V tomto případě prodala 160 letenek.

Pravděpodobnost, že se pasažér nedostaví, je 0,1. Předpokládejme, že pasažéři se chovají nezávisle na sobě.

Jaká je pravděpodobnost, že některý pasažér bude muset být přemístěn na jiný let z důvodu nedostatku místa v letadle?

Úloha 11.4 (náhodná procházka)

Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$ takových, že $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Představujeme si, že hodnota 1 znamená krok doprava, hodnota -1 znamená krok doleva. Potom veličina $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ určuje místo, kde se nacházíme po n krocích.

Ukázka: `http://e.sci.osaka-cu.ac.jp/yoshino/download/rw/`

Určete hodnoty $\mathbb{P}(S_n = k)$ pro vhodné kombinace hodnot n a k.

Úloha 11.5 (čekání na úspěch)

Uvažujme posloupnost nezávislých experimentů s pravděpodobností úspěchu p.

Označme Y počet neúspěchů před prvním úspěchem.

Určete rozdělení náhodné veličiny Y, tedy hodnoty $\mathbb{P}(Y = k)$ pro všechny relevantní hodnoty k.

Ověřte, že se tyto pravděpodobnosti nasčítají na 1.