Př: $y''+y=\delta\cdot\sin ax$

a) $y''+y=0$ $\quad\lambda^2+1=0$ $\quad\lambda_{1,2}=\pm i$

FSŘ $\quad e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$ $\quad e^{-ix}=\cos x-i\cdot\sin x$

$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$ $\quad\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x$

$y(x)=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x$ na $\mathbb{R}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

b1) $a\neq\pm1$ $\quad\left|P_m(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\begin{matrix}\sin\beta x\\\cos\beta x\end{matrix}\right|$ $\quad P_m\equiv1,\ \alpha=0,\ \beta=a,\ \alpha+i\beta=ia$ není kořen $k=0$

$\Rightarrow y_0=c\cdot\cos ax+d\cdot\sin ax$; $\quad y_0'=-c\cdot\sin ax\cdot a+d\cdot a\cdot\cos ax$

$y_0''=-c\cdot a^2\cdot\cos ax-d\cdot a^2\cdot\sin ax$

$y_0''+y_0=-ca^2\cos ax-da^2\sin ax+c\cdot\cos ax+d\cdot\sin ax=\delta\cdot\sin ax$

$\Rightarrow c=0$ $\quad -d\cdot a^2+d=\delta\Rightarrow d=\frac{\delta}{1-a^2}$; $\quad y=\frac{\delta}{1-a^2}\cdot\sin ax+C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x$ na $\mathbb{R}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

b2) $a=1$, $P_m\equiv1$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\alpha+i\beta$ je 1-násobný kořen $k=1$

$y_0=x\cdot c\cdot\cos x+x\cdot d\cdot\sin x$; $\quad y_0'=c\cdot\cos x-xc\sin x+d\cdot\sin x+x\cdot d\cdot\cos x$

$y_0''=-c\sin x-c\cdot\sin x-xc\cos x+d\cdot\cos x+d\cdot\cos x-dx\sin x$

$y_0''+y_0=-c2\sin x-\cancel{xc\cos x}+2d\cos x-\cancel{dx\sin x}+\cancel{xc\cos x}+\cancel{xd\sin x}=\delta\cdot\sin x$

$\Rightarrow d=0,\ -2c=\delta\Rightarrow c=-\frac{1}{2}\delta\Rightarrow$

$y(x)=-\frac{1}{2}\delta\cdot x\cdot\cos x+C_1\cos x+C_2\cdot\sin x$ na $\mathbb{R}$ pro $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

18.5 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

$y' = A \cdot y$

Maticová exponenciála neformálně: $\left.\begin{matrix} y' = a \cdot y \\ y(0) = y_0 \end{matrix}\right\} \quad y = e^{ax} \cdot y_0$

$y' = A \cdot y, \quad y(0) = y_0 \qquad y(x) = e^{A \cdot x} \cdot y_0$

A $n \times n$ matice

$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \qquad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad \|A^k\| \leq \|A\|^k$ vše konverguje

$e^0 = I$

$y'(x) = \left(e^{Ax} \cdot y_0\right)' = \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot x^k}{k!}\right) \cdot y_0\right]'$

$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{A^k \cdot x^k}{k!}\right]'\right) \cdot y_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A \cdot \frac{A^{k-1} \cdot x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \cdot y_0 =$

$= A \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} \cdot x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \cdot y_0 = A \cdot e^{Ax} \cdot y_0 = \underline{A \cdot y(x)}$

$e^{Ax} = e^{R^{-1} J R x}$ R regulární matice, J Jordanův tvar $\qquad = R^{-1} \cdot e^{Jx} \cdot R$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$

$e^{Jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot x^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k x^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$

Věta L8.9 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty) 23.3

Nechť má matice A všechna vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá a nechť $v_1, \dots, v_n$ jsou příslušné vlastní vektory. Pak vektorové funkce $v_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, v_n \cdot e^{\lambda_n x}$ tvoří fundamentální systém řešení $y' = A \cdot y$ na $\mathbb{R}$.

Dk: Nechť $y(x) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$, pak $y'(x) = v_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$. Tedy

$$y'(x) = v_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = A \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = A \cdot y(x).$$

Tedy máme n řešení a chceme dokázat, že jsou lineárně nezávislá.

Nechť pro spor $\exists c_i \in \mathbb{R}$: $c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot v_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \cdot v_n \cdot e^{\lambda_n x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

BÚNO $c_1 \neq 0$ $\quad / \cdot e^{-\lambda_n x}$

$$c_1 \cdot v_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n) \cdot x} + \dots + c_n \cdot v_n = 0 \quad / \text{zderivuj}$$

$$c_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_n) \cdot v_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n) \cdot x} + \dots + c_{n-1} \cdot (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \cdot v_{n-1} \cdot e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n) \cdot x} = 0$$

$/ \cdot e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot x}$ + zderivuj

$e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n) \cdot x}$

Toto zopakujeme $(n-1)\times$ a dostaneme

$$c_1 \cdot \alpha v_1 = 0 \implies c_1 = 0 \quad \text{spor}$$

$\square$

$A \cdot v = \lambda \cdot v$

Poznámka: nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze FSŘ také algoritmicky sestrojit. Nechť λ je k-násobné vlastní číslo

a) Pokud existuje k ~~tato~~ lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$, pak do FSŘ dáme funkce $v_1 \cdot e^{\lambda x}, v_2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, v_k \cdot e^{\lambda x}$

b) Pokud existuje pouze jeden vlastní vektor, tak nalezneme řetězec vektorů $v_2, \dots, v_k$, aby

$$(A-\lambda E)\cdot v_1 = 0,\ (A-\lambda E)\cdot v_2 = v_1, \dots, (A-\lambda E)\cdot v_k = v_{k-1}$$

a do FSŘ dáme funkce

$$v_1 \cdot e^{\lambda x},\ v_1 \cdot x \cdot e^{\lambda x} + v_2 \cdot e^{\lambda x},\ v_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^{\lambda x} + v_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} + v_3 \cdot e^{\lambda x},\ \frac{x^k}{k!} \cdot e^{\lambda x} \cdot v_1 + \dots + v_k \cdot e^{\lambda x}.$$

c) Pokud existuje více vlastních vektorů, ale ne k, tak provedeme něco navíc. Záleží to na Jordanově tvaru matice $A = R^{-1} J R$, kde R je matice rotace. Je-li například $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

pak existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory (jeden pro druhý řádek v_1 a jeden pro třetí řádek v_2). Pro ten první nalezneme příslušný řetězec délky 2 ($(A-\lambda E)\cdot v_1 = v_3$) a do FSŘ

dáme $v_1 \cdot e^{\lambda x},\ v_1 \cdot x \cdot e^{\lambda x} + v_3 e^{\lambda x},\ v_2 \cdot e^{\lambda x}$

Odůvodnění: $y' = A y \qquad y(x) = e^{Ax}\cdot y_0$

$A = R^{-1} J R \qquad A^2 = R^{-1} J \cancel{R R^{-1}} J R = R^{-1} J^2 R, \quad A^3 = R^{-1} J^3 R$

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{-1}\cdot J^k \cdot R}{k!}\cdot x^k = R^{-1}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k x^k}{k!}\right)\cdot R =$$

$= R^{-1}\cdot e^{Jx}\cdot R \qquad \cancel{J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix}}$ viz předch. $e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k, & \binom{k}{1}\cdot\lambda^{k-1}, & \binom{k}{2}\cdot\lambda^{k-2} & \dots \\ 0 & \lambda^k & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \dots$

$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & x\cdot e^{\lambda x}, & \frac{x^2}{2}\cdot e^{\lambda x} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Příklady: 1) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot y$ s poč. podmínkou $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)\cdot(\lambda-4)$

$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot v_1 = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 4 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot v_2 = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné řešení $C_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{x} + C_2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{4x}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$

$y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^0 + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^0 = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 \\ -C_1 + C_2 \end{pmatrix}$ $\left|\begin{array}{l} C_1 + 2C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{array}\right. \implies C_1 = C_2 = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{4x}$ na $\mathbb{R}$

② $y' = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot y$ $\qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+5 = (\lambda-(2+i))\cdot(\lambda-(2-i))$ $\quad$ 23-6

$\lambda_1: \begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\cdot v_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix} \qquad \lambda_1 . \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

$\lambda_2: \begin{pmatrix}-1+i & 1\\ -2 & 1+i\end{pmatrix}\cdot v_2 = 0 \qquad v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix}$

FSŘ $\quad \underbrace{c_1 \cdot e^{(2+i)x}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}}_{y_1} + \underbrace{c_2\cdot e^{(2-i)\cdot x}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix}}_{y_2}$

do FSŘ dej $\dfrac{y_1+y_2}{2}$ a $\dfrac{y_1-y_2}{2}$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\cdot(\cos x + i\sin x)\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix} + e^{2x}\cdot(\cos x - i\sin x)\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2x}\cos x + \cancel{e^{2x}\sin x\cdot i} + e^{2x}\cos x - \cancel{e^{2x}\, i\sin x} \\ e^{2x}\cdot\cos x + \cancel{e^{2x}\, i\sin x} + \cancel{i\cdot e^{2x}\cos x} - e^{2x}\sin x + \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x}\cos x \\ e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\end{pmatrix}$$

analogicky $\dfrac{y_1-y_2}{2} = \ldots$

3. $y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot y$ $\quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 9 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda-2)^3$ $\quad$ [23-7]

$\lambda = 2$ je 3-násobné vl. číslo $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\cdot$ $\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I) \cdot v = 0 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot v \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ∃ pouze 1 vlastní vektor

najdeme řetězec délky 2:

$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot v_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \cancel{C_2 \left(x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \right.}$

$+ C_2 \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + C_3 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \right)$ na $\mathbb{R}$ pro $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$