STABILITA 2

1. Polární souřadnice

Př $\quad x' = -y - x^3$ $\quad$ Vyšetřete stabilitu počátku

$\quad y' = x - y^3$

linearizovaná stabilita

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vl. čísla} \quad \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

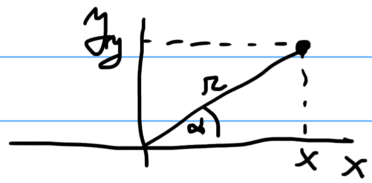
vl. čísla $\lambda_{1,2} = \pm i \quad \operatorname{Re} \lambda = 0$

lineární rovnice je stabilní (sin, cos)

o nelineární rovnici nedokážeme rozhodnout

$x(t) = r(t) \cos \alpha(t) \qquad x = r \cos \alpha$

$y(t) = r(t) \sin \alpha(t) \qquad y = r \sin \alpha$



$$x'(t) = r'(t) \cos \alpha(t) + r(t) \cdot (-\sin \alpha(t))\, \alpha'(t) = -r \sin \alpha - r^3 \cos^3 \alpha$$

$$y'(t) = r'(t) \sin \alpha + r \cdot \cos \alpha \cdot \alpha' = r \cos \alpha - r^3 \sin^3 \alpha$$

I.$\cdot \cos \alpha$ + II.$\cdot \sin \alpha$:

$$r' \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} + r \underbrace{(-\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha)}_{=0} \alpha' = \dots$$

$$r' = -\cancel{r \sin \alpha \cos \alpha} - r^3 \cos^3 \alpha \cdot \cos \alpha$$
$$+ \cancel{r \cos \alpha \sin \alpha} - r^3 \sin^3 \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$r' = -r^3 \underbrace{(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)}_{> \frac{1}{100}} < -\frac{r^3}{100}$$

$r' < 0 \Rightarrow r$ klesá

$r' = -\frac{r^3}{100}$ ... kvalitativní analýza / vyřešíme

$\rightsquigarrow r \to 0$

v naší rovnici r klesá ještě rychleji

$\Rightarrow r \to 0$ tj. 0 je asymptoticky stabilní.

2. Ljapunovská funkce

$\boxed{(AR)\ x' = f(x)}$; $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ tř. C^1, $\boxed{f(0) = 0}$

DF: Řekneme, že $V: \Omega \to \mathbb{R}$ je **ljapunovská funkce** systému (AR), jestliže

(i) V je spojitá

(ii) $\forall x \in \Omega$ je $V(x) \geq 0$ a rovnost nastává, právě když $x = 0$ a

(iii) je nerostoucí podél řešení, tj funkce $t \longmapsto V(x(t))$ je nerostoucí, kdykoli x je řešení (AR)

Př: kandidáti na ljapunovskou funkci jsou

$V(x,y) = x^2 + y^2$ nebo obecněji $a \cdot x^{2n} + b y^{2m}$, $m,n \in \mathbb{N}$, $a,b > 0$

VĚTA 1: Nechť má (AR) ljapunovskou funkci. Pak nulové řešení je stabilní.

VĚTA 2: Nechť má (AR) ljapunovskou funkci V třídy C^1 a funkce $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x)$ ← ORBITÁLNÍ DERIVACE
splňuje

$$\dot{V}(x) = 0 \iff x = 0.$$

Pak nulové řešení je asymptoticky stabilní.

$x = x(t)$ řešení $\qquad t \longmapsto V(x(t))$ nerostoucí

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$$

$$\boxed{0 \geq \frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla V(x(t))\, f(x(t)) = \dot{V}(x(t))}$$

(Př) $x' = -2y - x^3$
$y' = x - y^3$

Zkusme ljap. fci $ax^2 + by^2 = V(x,y)$

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{2ax} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{x' = -2y - x^3} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{2by} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{y' = x - y^3} =$$

$$= 2ax(-2y - x^3) + 2by(x - y^3)$$
$$= -4axy - 2ax^4 + 2bxy - 2by^4$$

$a = 1, b = 2 \rightsquigarrow -4axy + 2bxy = 0$

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = -2x^4 - 4y^4 \leq 0$$

Věta 1: Je to ljapunovská funkce $\Rightarrow$ stabilita

Věta 2: $-2x^4 - 2y^4 = 0$ jen pro $(x,y) = (0,0)$, jinak je ostře menší než 0.
$\Rightarrow$ asymptotická stabilita

(Př) $x' = -2y - 4xy^2$
$y' = x - y^3 + x^2 y$

$V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = 2max^{2m-1} \underbrace{(-2y - 4xy^2)}_{x'} + 2nby^{2n-1} \underbrace{(x - y^3 + x^2 y)}_{y'}$$

$$= -4ma\,x^{2m-1}y - 8ma\,x^{2m}y^2 + 2nb\,y^{2n-1}x - 2nb\,y^{2n+2}$$

$$+ 2nb\,y^{2n}x^2$$

$m = 1 \Rightarrow 2m-1 = 1$ $\qquad -4axy + 2byx$

$n = 1 \Rightarrow 2n-1 = 1$

$b = 2a$ např. $a=1, b=2$ $\qquad -4xy + 4yx = 0$

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = -8x^2y^2 - 4y^4 + 4y^2x^2 = -4x^2y^2 - 4y^4$$

$$= -4y^2(x^2+y^2) \leq 0$$

VĚTA 1: stabilita

VĚTA 2: v bodech $x \neq 0, y = 0$ je $\dot{V} = 0$

$\Rightarrow$ nejsou splněny předpoklady VĚTY 2

nemůžeme rozhodnout o asymptotické stab.
(možná existuje lepší Ljapunovská funkce...)
