# ApDR - 10. PŘEDNÁŠKA

## MINULE:

**VĚTA** („základní věta přírodního výběru") Nechť je matice A symetrická, pak $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \geq 0$ pro lib. řešení x rovnice (RD), přičemž rovnost nastává právě ve stacionárních bodech.

**dk:** $\pi(x(t)) = \cancel{x(t)}^T A x(t)$

nepíšu T

$$\frac{d}{dt}\pi(x(t)) = x'^T A x + x^T A x' = 2\,x' A x =$$

$$\left( x A x' = (x^T A x')^T = x'^T A^T x = x'^T A x \right)$$

OPRAVENO:

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i' (Ax)_i = 2 \sum_{i=1}^{n} (\cancel{x_i} e^i A x - x A x) x_i (Ax)_i$$

$$2 \sum (\pi(\cancel{x_i} e^i, x) - \pi(x,x)) x_i \pi(\cancel{x_i} e^i, x) - \left[ \underbrace{\sum x_i (\pi(e^i, x) - \pi(x,x))}_{=0,\ \text{protože}} \right] \pi(x,x)$$

$$\sum x_i \pi(e^i, x) = \pi\left(\sum x_i e^i, x\right) = \pi(x,x)$$

a $\sum x_i \pi(x,x) = 1 \cdot \pi(x,x)$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \pi(x_i e^i, x) - \pi(x,x) \right)^2 \geq 0$$

rovnost nastává $\iff \pi(x_i e^i, x) = \pi(x,x)\ \forall i \in C(t)$

tj $\forall i$ je $d_i = 0$ nebo $x_i = 0$

→ stacionární bod □

$$\begin{array}{c|cccc} & H & J & O & K \\ \hline H & \boxed{2} & 0 & 2 & \boxed{0} \\ J & 6 & -2 & -2 & 6 \\ O & 2 & -2 & 2 & 6 \\ K & \boxed{6} & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

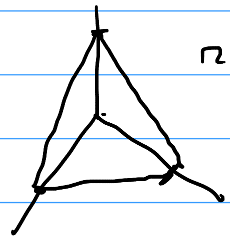
| | |
|---|---|
| vítězství | 6b |
| prohra | 0b |
| zranění | −10b |
| ztráta času | −1b |

O… odvetník (retaliator) vyčkává, ale na útok reaguje protiútokem

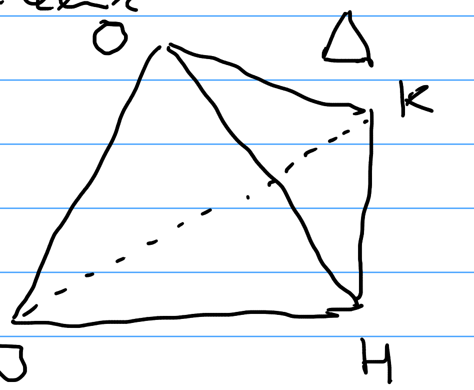
K… křikloun (bully) útočí, ale když soupeř zaútočí, tak uteče

K-N-P

$\Delta = \{k+n+p=1\}$

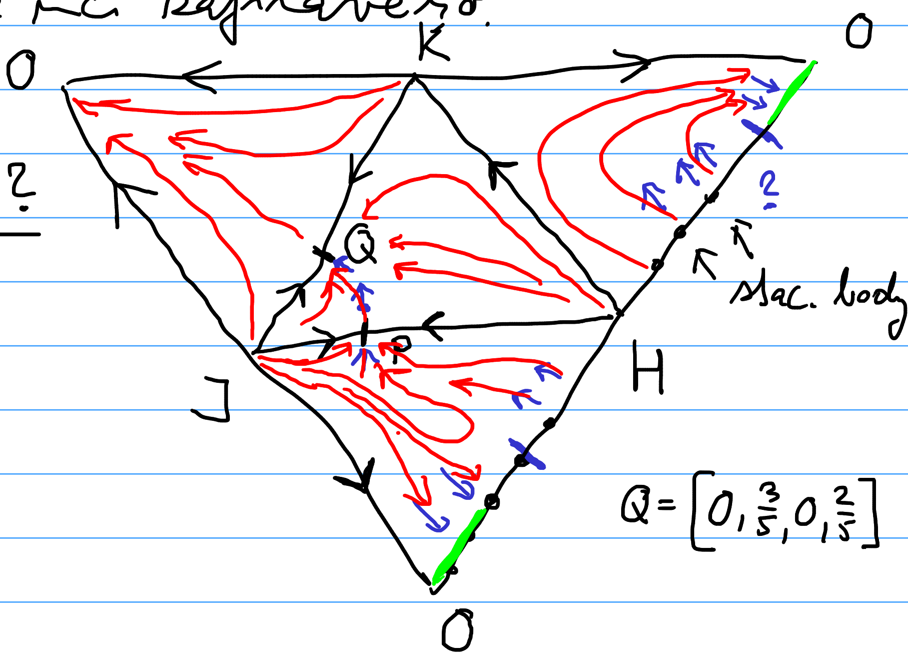


rovnostranný trojúhelník




Pro 4 rovnice máme čtyřstěn

Časem uvidíme, že ve vnitřku čtyřstěnu se neděje nic zajímavého.




## Co se děje na hranách?

J-H: $P = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right]$

$Q = \left[0, \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right]$

H-K:            O-M

O-J:

O-K:

J-K

$$\begin{array}{c|cc} & J & K \\ \hline J & -2 & 6 \\ K & 0 & 3 \end{array} \quad (RD)$$

$$j' = (JAx - xAx)\cdot j \qquad x = (0, j, 0, 1-j)$$

$$J = (0, 1, 0, 0)$$

$$\dot{j} = \left( (-2j + 6(1-j)) - (-2j^2 + 6j(1-j) + 3(1-j)^2) \right) j$$

$$\dot{j} = (5j^2 - 8j + 3)\, j \qquad j_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\dot{j} = 5\underbrace{(j-1)}_{<0}\left(j-\frac{3}{5}\right)\underbrace{j}_{>0}$$

$$j < \frac{3}{5} \quad \dot{j} > 0$$

$$j > \frac{3}{5} \quad \dot{j} < 0$$

## Na okolí stacionárních bodů

- Na okolí P v rovině KJH $\qquad K = (0,0,0,1)$

$$\dot{k} = (KAP - PAP)\, k \qquad P = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0\right)$$

$$(0,0,0,1)\, A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underset{A_{41}}{6} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \underset{A_{42}}{0} = 2 > 0$$

- Na okolí P v rovině JHO

$$\dot{o} = (OAP - PAP)\, o$$

$$(0,0,1,0)\, A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \dot{o} < 0$$

- Podobně na okolí Q
- Poblíž úsečky O–H, když se objeví křižlovi:

$$k = (0,0,0,1)$$

$$\dot{k} = (\underbrace{KAx - xAx}) k \qquad x = (h, 0, 1-h, 0)$$

$$= 6h + 0(1-h) - \left(2h^2 + 4h(1-h) + 2(1-h)^2\right)$$

$$= (0h^2 + 6h - 2)\, k \qquad h > \tfrac{1}{3} \quad \dot{k} > 0$$

$$h < \tfrac{1}{3} \quad \dot{k} < 0$$

## Vnitřky stěn

Uvnitř stěn není stacionární bod ani periodické řešení.

**VĚTA (ZEEMAN '79):** Pokud nemají všechny souřadnice vektoru $(\mathrm{Adj}\,A)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ stejná znaménka, pak ve vnitřku $\Delta$ není stacionární bod (RD) ani periodický orbit.

PZ: 1. Pro potřeby věty rozlišujeme 3 znaménka $+, -, 0$.

2. Připomeňme, že pro $A = (a_{ij})_{i=1..n}^{j=1..n}$ je

$$\mathrm{Adj}\, A = \left((-1)^{i+j} M_{ji}\right)$$ kde $M_{ij}$ je determinant

matice, která vznikne z $A$ vyškrtnutím $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.

Použijeme na stěny čtyřstěnu:

HJO

$$\begin{array}{cccc} & H & J & O \\ H & 2 & \cancel{0} & 2 \\ J & \boxed{6} & -2 & -2 \\ O & \boxed{2} & -2 & 2 \end{array} \qquad M_{ij} = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & -16 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj} \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -16 & 0 & +16 \\ -8 & +4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ není stac. bod ani per. orbit 1

JOK $\ldots \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ ✓ HJK $\ldots \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix}$ ✓

HOK $\ldots \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

---

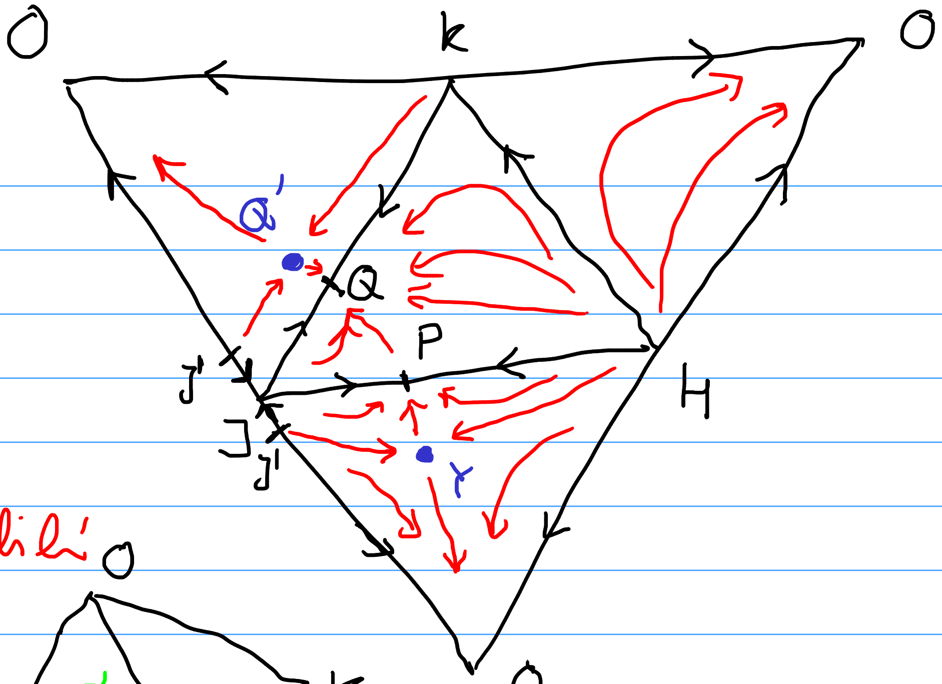
DF: Řekneme, že vlastnost $P$ je robustní, jestliže ji malé perturbace zachovávají, tj. pokud $A$ má vlastnost $P$, pak $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall B\ \|A-B\| < \varepsilon \Rightarrow B$ má vlastnost $P$.

Výše uvedený systém není robustní, tj. není stabilní.

dejme výhodu $O$ vůči $H$ a $J$ vůči $O$

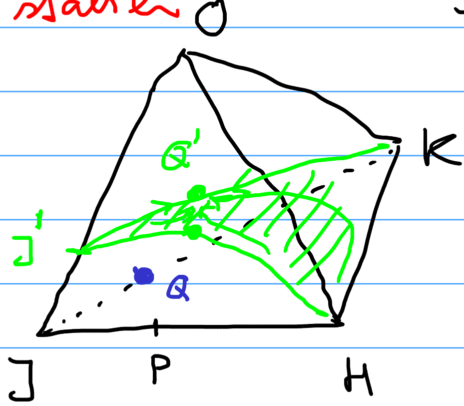
$$\begin{array}{ccc} & H & O \\ H & 2 & 2-\varepsilon \\ O & 2+\varepsilon & 2 \end{array} \quad \varepsilon > 0 \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & J & O \\ J & -2 & -2+\delta \\ O & -2-\delta & 2 \end{array} \quad \delta > 0$$

| | H | J | O | K |
|---|---|---|---|---|
| H | 2 | 0 | 2-ε | 0 |
| J | 6 | -2 | -2+δ | 6 |
| O | 2+ε | -2-δ | 2 | 6 |
| K | 6 | 0 | 0 | 3 |




Q asymptoticky stabilní

O —||—




zelenou

Pod plochou ⟶ Q

Nad plochou ⟶ O

---

TVRZENÍ: 1. $\tilde{x} \in \mathrm{Int}\,\Delta$ je stacionární bod $\Longleftrightarrow$ $e^iA\tilde{x}$ nezávisí na $i \in \{1, \dots, n\}$

2. Jestliže má (RD) ve vnitřku Δ periodický orbit, pak má ve vnitřku Δ stacionární bod.

dk: 1. „$\Rightarrow$“ $\tilde{x} \in \mathrm{Int}\,\Delta$ je stacionární

$$x_i' = (e^iAx - xAx)x_i \qquad \text{v bodě } \tilde{x}$$

$$x_i' = (e^iA\tilde{x} - \tilde{x}A\tilde{x})x_i$$

$\tilde{x} \in \mathrm{Int}\,\Delta \Rightarrow x_i > 0\ \forall i$ stac. $\Rightarrow e^iA\tilde{x} = \tilde{x}A\tilde{x}$ ✓

„$\Leftarrow$“ $e^iA\tilde{x} = c\ \ \forall i \qquad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\underbrace{\sum x_i c}_{= c} = \sum x_i e^i A\tilde{x} = \left(\sum x_i e^i\right)A\tilde{x} = \tilde{x}A\tilde{x}$$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{x}A\tilde{x} = c = e^iA\tilde{x} \Rightarrow (e^iA\tilde{x} - \tilde{x}A\tilde{x}) = 0$

$\Rightarrow$ stac. bod ✓

2. Vezměme si periodické řešení $x(t)$ s periodou $T$

$$x_i' = (e^i A x(t) - x(t) A x(t)) \cdot x_i \qquad / : x_i \quad \int_0^T \cdot \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{x_i'}{x_i}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^i A x(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T x(t) A x(t)\,dt$$

$$\frac{1}{T}\Big(\underbrace{\ln x_i(T) - \ln x_i(0)}_{=0}\Big) = e^i A \tilde{x} - c \quad \Rightarrow e^i A \tilde{x} = c \ \forall i$$

dle 1. je $\tilde{x}$ stac. bod

def $\tilde{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

def $c = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) A x(t)\,dt$

(uvědomme si, že $\tilde{x} \in \operatorname{Int} \Delta$ ... z definice $\tilde{x}$).

$\square$

---

Literatura: Zeeman, Population dynamics from game theory, 1980