Algebra — cvičení 10

(příklady cihlovou barvou jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

Cyklické grupy

a, b prvky konečné grupy G; pokud a, b komutují, pak ord(a.b) = NSN(ord(a), ord(b))

1. Najděte všechny generátory grupy:

   f: Z_{12} ---> Z_{13}^*
   n |---> 2^n mod 13

   (a) $\mathbb{Z}_{12}$; 1, 11, 5, 7 ... právě prvky grupy Z_{12}^*

   (b) $\mathbb{Z}_{13}^*$; je izomorfní grupě Z_{12} ... nejprve zkusmo najdu jeden generátor Z_{13}^* ... 2^4 = 3, 2^6 = 3.4 = 12 (= -1) + Lagrangeova věta ==> 2 je generátor grupy Z_{13}^*; další generátory jsou pak f(5) = 2^5 = 6, f(7) = 2^7 = 11, 2^11

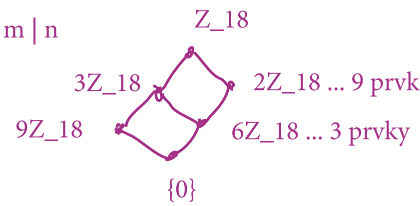
   (c) $\mathbb{Z}_{11}^*$.

2. Hledali byste raději generátor grupy $\mathbb{Z}_{181}^*$, nebo grupy $\mathbb{Z}_{227}^*$? 180 = 2^2.3^2.5; 226 = 2.113

3. Napište všechny podgrupy grupy. Jak jsou podgrupy uspořádány inkluzí?

   (a) $\mathbb{Z}$; nZ ... n je přirozené nebo 0 (právě hlavní ideály) ... nZ podmnožina mZ <==> m | n

   (b) $\mathbb{Z}_{18}$; 18 = 2.3^2

   (c) $\mathbb{Z}_{23}^*$;

   (d) $\mathbb{Z}_{17}^*$.

4. Rozložte dané grupy na direktní součin co nejvíce netriviálních cyklických grup:
   každá netriviální v rozkladu musí být řádu mocniny prvočísla

   (a) $\mathbb{Z}_{18}$;

   (b) $\mathbb{Z}_{29}^*$; je izomorfní Z_28, což je dále izomorfní Z_4 x Z_7

   (c) $\mathbb{Z}_{21}^*$.

5. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické:

   (a) $\mathbf{S}_3$; ne... není komutativní

   (b) $\mathbf{A}_3$;

   (c) $\mathbb{Z}_{12}^*$;

   (d) $\mathbb{Z}_{14}^*$.

6. Najděte všechny homomorfismy

   (a) ze $\mathbb{Z}_7^*$ do $\mathbb{Z}_8$;

   (b) ze $\mathbb{Z}_{11}$ do $\mathbb{Z}_{2021}$.

7. Buď $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$. Najděte generátor grupy T^*. Kolik má tato grupa generátorů celkem?

Další počítání

8.* Pro jaká $m, n \in \mathbb{N}$ je grupa $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ cyklická?

9.* Ukažte, že pro komutativní okruh R nemůže mít grupa R^* pět prvků.