Algebrou proti koronaviru iX

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Podgrupy a Lagrangeova věta

1. Určete počet prvků množiny všech permutací v $\mathbb{S}_5$, které jsou konjugované s permutací $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Tvoří tato množina podgrupu $\mathbb{S}_5$?

2. Najděte nejmenší podgrupu $\mathbb{S}_5$, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, tj. $\langle \pi \rangle_{\mathbb{S}_5}$. Kolik má prvků?

3. Ukažte, že platí:

   (a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$

   (b) $\langle (1,0),(0,1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{NSD}(a,b)\mathbb{Z}$

   (d) $\langle \{(a\,b) \mid a, b \leq n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

   (e) $\langle \{(a \quad a+1) \mid a < n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

   (f) $\langle \{(1\,2), (1 \ldots n)\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

4. Rozhodněte, zda existuje v grupě $\mathbb{S}_{17}$ prvek řádu

   (a) 71 (b) 72 (c) 80.

5. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?

Homomorfismy

6. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy

   (a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$

   (b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$

   (c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$

   (d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$

   (e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$

   (f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

7.* Uvažujme grupu $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Ukažte, že:

(a) zde mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik.

(b) ji nelze nagenerovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).

8.* Buď $n \geq 4$.

(a) Ukažte, že permutaci $\pi = (a\,b)(c\,d)$ sestávající ze dvou disjunktních cyklů lze napsat jako součin trojcyklů.

(b) S využitím předchozího bodu si rozmyslete, že každou sudou permutaci lze napsat jako součin trojcyklů.

(c) Rozmyslete si, že jste právě ukázali, že $\mathbb{A}_n$ je pro $n \geq 3$ generována trojcykly (tedy speciálně vzhledem k bodu (3f), že neplatí $H \lneq G \Rightarrow H$ lze nagenerovat méně prvky než G).

9.* Buď $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\}$ grupa s operací maticového násobení.

(a) Ukažte, že $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\}$ je podgrupa v $\mathbf{G}$.

(b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu $[a, b]$ v reálné rovině $\mathbb{R}^2$.)

(c) Najděte nějakou levou/pravou transverzálu rozkladu.

10.* Dokažte, že jsou navzájem izomorfní grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$, $K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq \mathbb{S}_4$

11.* Dokažte, že grupy $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{A}_4$ a $\mathbb{Z}_{12}$ jsou po dvou neizomorfní.