Domácí úloha (taxíky):

$M = \{\text{taxík byl modrý}\}$ $\qquad \mathbb{P}(M) = 0{,}15$

$Z = \{\text{taxík byl zelený}\}$ $\qquad \mathbb{P}(Z) = 0{,}85$

$S = \{\text{svědek říká modrý}\}$ $\qquad \mathbb{P}(S|M) = 0{,}8$

$\mathbb{P}(S|Z) = 0{,}2$

$$\mathbb{P}(M|S) = \frac{\mathbb{P}(M\cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|M)\cdot\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(S|M)\cdot\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(S|Z)\cdot\mathbb{P}(Z)} = \frac{0{,}8 \quad 0{,}15}{0{,}8\cdot 0{,}15 + 0{,}2\cdot 0{,}85} = \frac{12}{29}$$

Bayesova věta $\qquad \mathbb{P}(S\cap M) + \mathbb{P}(S\cap Z)$

$\{M, Z\}$ ... úplný systém jevů

10.2 $\quad D = \{\text{nemoc}\}$ $\qquad \mathbb{P}(D) = 0{,}01$ ... apriorní pst

$+ = \{\text{pozitivní test}\}$ $\qquad \mathbb{P}(D|+) = ?$ ... aposteriorní ps

$- = \{\text{neg. test}\}$ $\qquad \mathbb{P}(+|D) = 0{,}999$ ... $\mathbb{P}(-|D) = 0{,}00$

$\{D, D^c\}$ ... úplný systém jevů $\qquad \mathbb{P}(-|D^c) = 0{,}99$ ... $\mathbb{P}(+|D^c) = 0{,}0$

$$\mathbb{P}(D|+) = \frac{\mathbb{P}(+|D)\cdot\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(+|D)\cdot\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(+|D^c)\cdot\mathbb{P}(D^c)} = \frac{0{,}999\cdot 0{,}01}{0{,}999\cdot 0{,}01 + 0{,}01\cdot 0}$$

$\doteq 0{,}502$

v řeči četností:

100 000 lidí → 1000 nemocných → $\boxed{999\ +}$, 1 −

100 000 lidí → 99 000 zdravých → $\boxed{990\ +}$, 98 010 −

$$\mathbb{P}(D|+) = \frac{999}{999+990} \doteq 0{,}502$$

10.3: $\quad B^{(n)} = \{\text{všech } n \text{ kuliček bylo bílých}\}$

$B_\ell = \{\text{v urně je } \ell \text{ bílých kuliček}\},\ \ell = 0, 1, \dots, 10$ $\qquad$ úplný systém

$$\mathbb{P}(B_{10}|B^{(n)}) = \frac{\mathbb{P}(B_{10}, B^{(n)})}{\mathbb{P}(B^{(n)})} = \frac{\mathbb{P}(B^{(n)}|B_{10})\cdot\mathbb{P}(B_{10})}{\sum_{\ell=0}^{10}\mathbb{P}(B^{(n)}|B_\ell)\cdot\mathbb{P}(B_\ell)} = (*)$$

$$\mathbb{P}(B_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\mathbb{P}(B^{(n)} \mid B_k) = \left(\frac{k}{10}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{k} = \mathbb{P}(B_k) = \binom{10}{k}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{panny (úspěch)}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}}_{\text{orli (ne}}$$

(binomické rozdělení)

$$(*) = \frac{1 \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}}{\sum_{k=0}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^n \cdot \binom{10}{k}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^n \binom{10}{k}} \xrightarrow{(**)} 1, \ n$$

ad $(**)$

$$\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{k}{10}\right)^n \overset{l = 10-k}{=} \sum_{l=0}^{10}\binom{10}{l}\Big(\underbrace{1 - \frac{l}{10}}_{\le e^{-\frac{l}{10}}}\Big)^n \le \sum_{l=0}^{10}\binom{10}{l} e^{-\frac{l}{10}\cdot n} =$$

.... $1 + x \le e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

↳ tečna e^x v bodě

binomická věta

$$= \Big(1 + \underbrace{e^{-\frac{n}{10}}}_{\to 0, \ n \to \infty}\Big)^{10} \longrightarrow 1, \ n \to \infty.$$

Číselně:

$n = 10$ ... $0{,}0702$

$n = 20$ ... $0{,}3523$

$n = 50$ ... $0{,}9504$

10.4: $D = \{\text{déšť}\}$

$P = \{\text{předpovězen déšť}\}$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{5}{365} = \frac{1}{73}$$

$$\mathbb{P}(P \mid D) = 0{,}90$$

$$\mathbb{P}(P \mid D^c) = 0{,}10$$

$$\mathbb{P}(D \mid P) = \frac{\mathbb{P}(D \cap P)}{\mathbb{P}(P)} =$$

$\{D, D^c\}$ úplný systém jevů

$$= \frac{\mathbb{P}(P \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\underbrace{\mathbb{P}(P \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}_{\mathbb{P}(D \cap P)} + \underbrace{\mathbb{P}(P \mid D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c)}_{\mathbb{P}(D^c \cap P)}} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{73}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{73} + \frac{1}{10} \cdot \frac{72}{72}} =$$

$$= \frac{9}{81} = \frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$$