Úkol, taxíky: $M = \{$taxík byl modrý$\}$ $\quad S_2 = \{$svědek se ne

$Z = \{$ $\quad$ zelený$\}$ $\quad P(S_2) = 0{,}8$

$S = \{$svědek říká „modrý"$\}$

$$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \mid M) \cdot P(M)}{P(S \mid M) \cdot P(M) + P(S \mid Z) \cdot P(Z)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}15}{0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}}$$

$P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap Z)$

$= \frac{12}{29} \doteq 0{,}4138$

$\{M, Z\}$ ... úplný systém jevů

$P(M)$ ... apriorní pst (před)

$P(M \mid S)$ ... aposteriorní pst (po)

$$P(\text{správně} \mid M) \overset{?}{\neq} P(\text{správně} \mid Z) \overset{?}{\neq} \dots$$

## úloha 10.2:

$D = \{$nemoc$\}$ $\quad P(D) = 0{,}01$ ... apriorní pst.

$+ = \{$pozitivní test$\}$ $\quad P(+ \mid D) = 0{,}999$ ... $P(- \mid D) = 0{,}001$

$- = \{$negativní test$\}$ $\quad P(- \mid D^c) = 0{,}99$ ... $P(+ \mid D^c) = 0{,}01$

hledáme $$P(D \mid +) = \frac{P(+ \mid D) \cdot P(D)}{P(+ \mid D) \cdot P(D) + P(+ \mid D^c) \cdot P(D^c)} = \dots$$

$\{D, D^c\}$ ... úplný systém jevů

$$\dots = \frac{0{,}999 \cdot 0{,}01}{0{,}999 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99} \doteq 0{,}502 \quad \text{... aposteriorní}$$

v řeči četností:

100 000 lidí → 1000 nemocných → 999× + ; 1× − (chybně)

100 000 lidí → 99 000 zdravých → 990× + (chybně) ; 98 010× −

⇒ celkem 1989 pozitivních ~~testů~~,

z nich 999 nemocných ... $\frac{999}{1989} \doteq 0{,}502$

• druhý test: $1+ = \{$první test $+\}$, $2+ = \{$druhý test $+\}$ $\Big\}$ viz doplňující mater na Moodlu

10.3: $B_q = \{$ v urně $q$ bílých kuliček $\}$, $q = 0, 1, \dots, 10$

$B^{(n)} = \{$ $n$-krát tažena bílá $\}$, $n \in \mathbb{N}$

$= \{$ všech $n$ bílých $\}$ 

$\{B_q\}$ je úplný systém jevů

$$\mathbb{P}(B_{10} \mid B^{(n)}) = \frac{\mathbb{P}(B_{10}, B^{(n)})}{\mathbb{P}(B^{(n)})} = \frac{\mathbb{P}(B^{(n)} \mid B_{10}) \cdot \mathbb{P}(B_{10})}{\sum_{q=0}^{10} \mathbb{P}(B^{(n)} \mid B_q) \cdot \mathbb{P}(B_q)} = \dots$$

$$\mathbb{P}(B_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad \mathbb{P}(B^{(n)} \mid B_{10}) = 1$$

$$\mathbb{P}(B_q) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{q}}_{\text{panny}} \binom{10}{q} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{10-q}}_{\text{orlové}} = \binom{10}{q}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad \mathbb{P}(B^{(n)} \mid B_q) = \left(\frac{q}{10}\right)^n$$

$$\dots = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\sum_{q=0}^{10} \left(\frac{q}{10}\right)^n \binom{10}{q} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{\sum_{q=0}^{10} \binom{10}{q} \left(\frac{q}{10}\right)^n} \xrightarrow{(*)} 1, \; n \to \infty$$

ad $(*)$: $\tilde{q} = 10 - q$

$$\sum_{q=0}^{10} \binom{10}{q} \left(\frac{q}{10}\right)^n = \sum_{\tilde{q}=0}^{10} \binom{10}{\tilde{q}} \left(1 - \frac{\tilde{q}}{10}\right)^n \le \sum_{\tilde{q}=0}^{10} \binom{10}{\tilde{q}} \left(e^{-\frac{\tilde{q} n}{10}}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(1 + \underbrace{e^{-\frac{n}{10}}}_{\to 0,\; n \to \infty}\right)^{10}}_{\text{binomická věta}} \longrightarrow 1, \; n \to \infty$$

$(1+x) \le e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

↳ tečna $e^x$ v $x = 0$

10.4: $D = \{$déšť$\}$ ... $\mathbb{P}(D) = \frac{5}{365} = \frac{1}{73}$ .... $\mathbb{P}(D^c) = \frac{72}{73}$

$P = \{$předpovězen déšť$\}$

$\{D, D^c\}$ .. úplný systém jevů

$\mathbb{P}(P \mid D) = 0{,}90$

$\mathbb{P}(P \mid D^c) = 0{,}10$

$$\mathbb{P}(D \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(P \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P \mid D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c)} =$$

$$= \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{73}\right) \Big/ \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{73} + \frac{1}{10} \cdot \frac{72}{73}\right) = \frac{\frac{9}{730}}{\frac{81}{730}}$$