

Věta o úplné pravděpodobnosti

Definice: Řekneme, že jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ tvoří *úplný systém jevů*, jestliže jsou po dvou disjunktní a $\cup A_i = \Omega$.

Věta: Necht' $\{A_i\}$ je úplný systém jevů takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé i . Potom platí

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i).$$

Úloha 10.1

Mámě dvě osudí A a B . Osudí A obsahuje 8 bílých a 7 černých míčků, zatímco v osudí B jsou 4 bílé a 6 černých.

Nejprve náhodně vylosujeme osudí (A s pravděpodobností $2/3$ a B s pravděpodobností $1/3$), pak ze zvoleného osudí vybereme jeden míček.

Je pravděpodobnější, že je bílý nebo černý?

Bayesova věta

Věta: Necht' $\{A_i\}$ je úplný systém jevů takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé i . Jestliže je $P(B) > 0$, potom platí

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}.$$

Důkaz: Platí

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

a stačí využít větu o podmíněné pravděpodobnosti k vyjádření $P(B)$ ve jmenovateli.

Úloha 10.2 (lékařská diagnostika)

Dříve, než propukne nemoc D , lze její latentní přítomnost odhalit biologickým testem. U skrytě nemocné osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,999 (*senzitivita* testu). Oproti tomu u zdravé osoby je test negativní s pravděpodobností 0,99 (*specifita* testu). Zjištění tedy není jednoznačné, onemocnění nemusí odhaleno, nebo může být vyvolán falešný poplach.

Předpokládáme, že sledovanou nemoc má 1% populace (*prevalence* nemoci). Jestliže u náhodně vybrané osoby dal test pozitivní výsledek, jaká je pravděpodobnost, že tato osoba má dané onemocnění?

Úloha 10.3 (urna se vrací)

Deseti bílými či černými koulemi byla urna naplněna tak, že bylo desetkrát hozeno symetrickou mincí. Padl-li rub (líc) mince, byla do urny vložena bílá (černá) koule.

Takto náhodně naplněná urna je zkoumána pomocí pokusu, který spočívá v tom, že z urny je postupně taženo n koulí, každá z nich je však po zjištění barvy do urny vrácena.

Výsledkem pokusu je zjištění, že všech n tažených koulí má bílou barvu (jev $B^{(n)}$).

Jaká je pravděpodobnost, že všechny koule v urně jsou bílé?

Úloha 10.4 (předpověď počasí)

Marie se zítra vdává. Obřad proběhne na dovolené v Egyptě, ve stínu pyramid v Gíze. V této oblasti v posledních letech prší pouze 5 dní v roce. Bohužel na zítřek předpověď počasí hlásí déšť.

Zkušenost říká, že nastavší déšť bývá předpovězen v 90 % případů. Na druhou stranu, na dny bez deště hlásí předpověď (chybně) déšť v 10 % případů.

Jaká je pravděpodobnost, že v Mariin svatební den bude v daném místě pršet?