Algebrou proti koronaviru IX

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Podgrupy a Lagrangeova věta

1. Určete počet prvků množiny všech permutací v $\mathbb{S}_5$, které jsou konjugované s permutací $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Tvoří tato množina podgrupu $\mathbb{S}_5$? [$2 \cdot \binom{5}{3}$; ne]

2. Najděte nejmenší podgrupu $\mathbb{S}_5$, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, tj. $\langle \pi \rangle_{\mathbb{S}_5}$. Kolik má prvků? [cyklická pětiprvková cyklická grupa generovaná prvkem $\pi = \{id, \pi, \pi^2 = (1\,3\,5\,2\,4), \pi^3 = (1\,4\,2\,5\,3), \pi^4 = (1\,5\,4\,3\,2)\}$]

3. Ukažte, že platí:
   (a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
   (b) $\langle (1,0), (0,1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   (c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{NSD}(a,b)\mathbb{Z}$
   (d) i. $\langle \{(a\,b) \mid a, b \leq n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$
       ii. $\langle \{(a \quad a+1) \mid a < n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$
       iii. $\langle \{(1\,2), (1 \dots n)\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

4. Rozhodněte, zda existuje v grupě $\mathbb{S}_{17}$ prvek řádu
   (a) 71 [ne, Lagrange] (b) 72 [ano, např. $(1 \dots 8)(9 \dots 17)$] (c) 80. [ne, pro disjunktní cykly délek n_i s $\mathrm{NSD}(n_i \mid i \leq k) = 80$ je $\sum n_i > 17$]

5. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní? [ano, podle Lagrangeovy věty jde o jednoprvkovou grupu]

Homomorfismy

6. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy [ve všech případech existuje příslušný triviální homomorfismus f zobrazující všechny prvky na neutrální prvek s $\mathrm{Ker}\, f$ rovným výchozí grupě, kromě toho pak:]
   (a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ [každý je jednoznačně obrazem 1; pro nenulová k pak platí $f_k(x) = x$, $\mathrm{Im\, f_k} = \mathrm{k}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ker\, f_k} = \{0\}$]
   (b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ [každý je jednoznačně určen obrazem 1; pro nenulová k platí $f_k(x) = k \cdot x \pmod{n}$, $\mathrm{Im\, f_k} = \langle \mathrm{k} \rangle_{\mathbb{Z}_\mathrm{n}}$, $\mathrm{Ker\, f_k} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{NSD(n,k)}}\mathbb{Z}$]
   (c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ [pouze triviální]
   (d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ [$f_1 : (1,0), (0,1) \mapsto 2$, $f_2 : (1,0), (1,1) \mapsto 2$, $f_3 : (1,1), (0,1) \mapsto 2$ a obrazy zbylých dvou prvků jsou vždy 0 (a tvoří tedy $\mathrm{Ker\, f_i}$), $\mathrm{Im\, f_i} = \{0, 2\}$]
   (e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ [$f_1 : 1 \mapsto (1,0)$, $f_2 : 1 \mapsto (1,1)$, $f_3 : 1 \mapsto (0,1)$, $f_i(2) = 0$, $f_i(3) = f_i(1)$, $\mathrm{Ker\, f_i} = \{0,2\}$, $\mathrm{Im\, f_i} = \langle \mathrm{f_i}(1) \rangle_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2} = \{(0,0), \mathrm{f_i}(1)\}$]
   (f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$ [$f_\sigma(1) = \sigma$ pro libovolnou transpozici $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $\mathrm{Ker\, f_\sigma} = \{0\}, \mathrm{Im\, f_\sigma} = \langle \sigma \rangle = \{\mathrm{id}, \sigma\}$]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

7.* Uvažujme grupu $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Ukažte, že:

(a) zde mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik.

(b) ji nelze nagenerovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).

8.* Buď $n \geq 4$.

(a) Ukažte, že permutaci $\pi = (a\,b)(c\,d)$ sestávající ze dvou disjunktních cyklů lze napsat jako součin trojcyklů. $[\pi = (a\,c\,b)(b\,d\,c)]$

(b) S využitím předchozího bodu si rozmyslete, že každou sudou permutaci lze napsat jako součin trojcyklů.

(c) Rozmyslete si, že jste právě ukázali, že $\mathbb{A}_n$ je pro $n \geq 3$ generována trojcykly (tedy speciálně vzhledem k bodu (3(d)iii), že neplatí $H \lneq G \Rightarrow H$ lze nagenerovat méně prvky než G).

9.* Buď $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$ grupa s operací maticového násobení.

(a) Ukažte, že $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$ je podgrupa v $\mathbf{G}$.

(b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu $[a, b]$ v reálné rovině $\mathbb{R}^2$.) [$\mathbf{H}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ odpovídá polopřímce z počátku se směrnicí $\frac{x}{y}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{H}$ pak vodorovné přímce $y = b$]

(c) Najděte nějakou levou/pravou transverzálu rozkladu. [levá např. $\{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\}$; pravá např. $\{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\}$]

10.* Dokažte, že jsou navzájem izomorfní grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$, $K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq \mathbb{S}_4$

11.* Dokažte, že grupy $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{A}_4$ a $\mathbb{Z}_{12}$ jsou po dvou neizomorfní.