Posloupnost martingalových diferencí $X_{n,j}$

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \quad \text{pokud} \quad \sup_n E \max_{j \le k_n} X_{n,j}^2 < \infty$$

$$\boxed{\max_{j \le k_n} |X_{n,j}| \xrightarrow{P} 0}$$

$$k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} 1$$

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n,j} \qquad k \le r_n$$

$S_{n,0} = 0, \quad S_{n,1} = X_{n,1}, \quad S_{n,2} = X_{n,1} + X_{n,2} \ \dots \quad (S_{n,k} ;\ k = 0, 1, \dots, r_n)$

tvoří diskrétní martingal

k pevné $\quad n \to \infty, \ r_n \to \infty$

$t \in (0,1]$ pevné $\qquad r_n(t) = \lfloor r_n \cdot t \rfloor$ největší index takový, že

$r_n \cdot t \ge r_n(t)$

$$W_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} = S_{n, r_n(t)} \qquad t \in [0,1] \quad (W_0^{(n)} = 0)$$

$W_t^{(n)}$ je po částech konstantní, zprava spojitý (s limitami zleva)

stochastický proces indexovaný intervalem $[0,1]$

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \qquad n \to \infty$$

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} \sigma_t^2$$

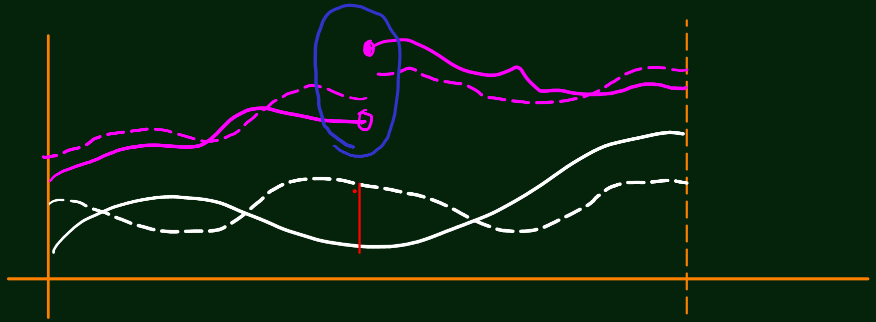
$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_t^2)$$

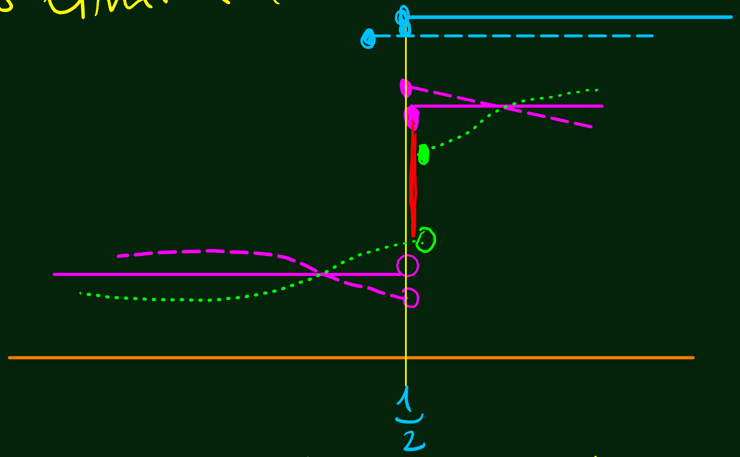
$$W_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_t^2)$$

Konvergence procesů

càdlàg proces = zprava spojité a s limitou zleva

D[0,1] prostor funkcí spojitých zprava s limitou zleva

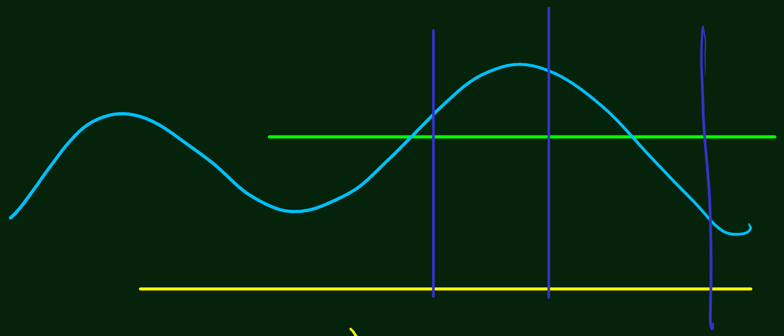




$$\sup_t \left| 1_{[0,\frac{1}{2})} - \left(1_{[0,\frac{1}{2})} - \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n}$$

$$\sup_t \left| 1_{[0,\frac{1}{2})} - 1_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n})} \right| = 1 \quad \forall n$$

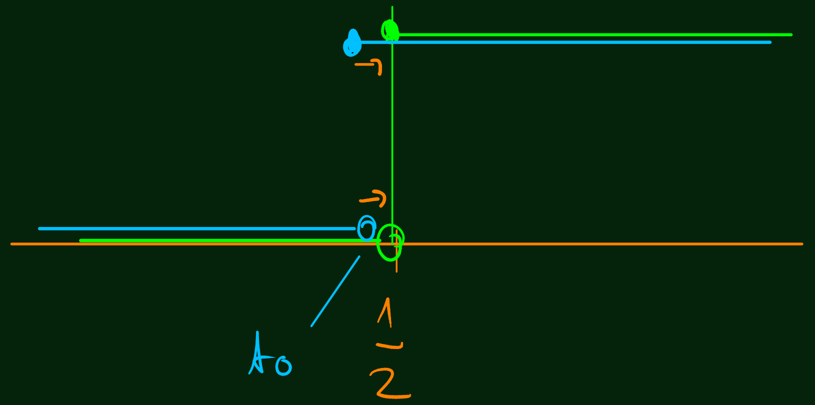
Skorochodova metrika



$$\Lambda = \{\lambda : [0,1] \to [0,1],\ \lambda(0)=0,\ \lambda(1)=1,\ \text{neklesající spojité}\}$$

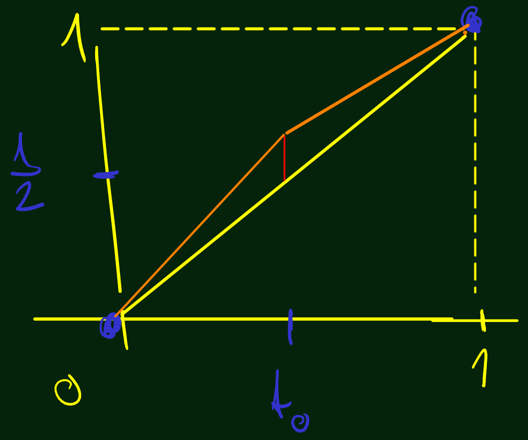
$$d_D(f,g) = \inf\{\varepsilon>0,\ \exists \lambda\in\Lambda,\ \sup|\lambda(t)-t|\le\varepsilon,\ \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(\lambda(t))| \le\varepsilon\}$$

$f,g\in D[0,1]$



$[0, t_0] \to [0, \frac{1}{2}]$

$[t_0, 1] \to [\frac{1}{2}, 1]$



<u>Lemma:</u> Prostor $(D[0,1], d_D)$ je ÚPLNÝ, SEPARABILNÍ, METRICKÝ prostor

P_n, P pravděpodobnostní míry na $(D[0,1], d_D)$

$$P_n \xrightarrow{w} P \iff \forall f: D[0,1] \to \mathbb{R} \text{ om. spoj. } \int_{D[0,1]} f(x)\, dP_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_{D[0,1]} f(x)\, dP(x)$$

neboli $E_{P_n} f(X) \longrightarrow E_P f(X)$

X_n má rozdělení P_n
X má rozdělení P

$E f(X_n) \longrightarrow E f(X) \quad \forall f$ spoj. OMEZENOU

$\xrightarrow{w}$ slabá konvergence pravděpodobnostních měr

$\xrightarrow{d}$ konvergence v distribuci náhodných veličin

Náš cíl $\left(W_t^{(n)},\ t \in [0,1]\right) \xrightarrow{d} \left(W_t\ \ t \in [0,1]\right)$

ANO ?   K JAKÉMU PROCESU ?

Ekvivalentní podmínky slabé konvergence

$$P_n \xrightarrow{w} P \iff \limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F) \quad \forall F \text{ uzavřenou}$$

(pro nás F je uzavř. v $(D[0,1], d_D)$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$$

$\iff \lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \quad \forall\, A$ halmaz, ha $P(\partial A) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall\, A$ halmaz, ha $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$

+ A borelhalmaz

Portmanteau