ApDR - 9. PŘEDNÁŠKA

MINULÉ:

$p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ $\quad p : \mathbb{R} \to \Delta = \{p \in \mathbb{R}^n, p_i \in [0,1]$ & $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$

Nashovo ekvilibrium (NE) .. $\tilde{x} \in \Delta$; $\tilde{x} \in \beta(\tilde{x})$

tj. $\pi(\tilde{x}, \tilde{x}) = \sup\{\pi(y, \tilde{x}) : y \in \Delta\}$

Evoluční stabilní strategie (ESS) ...

LEMMA $\tilde{x}$ je (ESS) $\Leftrightarrow$ $\tilde{x}$ je NE a pokud $y \neq \tilde{x}$

$y \in \beta(\tilde{x}) \Rightarrow \pi(\tilde{x}, y) > \pi(y, y)$.

Replikátorová dynamika

$$\boxed{(RD) \qquad p_i' = \alpha_i p_i \qquad \alpha_i = e_i A p - p A p}$$

Dodatek ke vztahu (ESS) a (NE)

Víme ESS $\Rightarrow$ NE ; opačná implikace neplatí

Př. KNP... leguánci pestří

... pozměníme: $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ je NE (aspoň pro $\varepsilon = 0$)

$$\pi\left((k,n,p), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\right) = (k,n,p)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\Big[k(\varepsilon + 1 - 1) + n(\varepsilon + 1 - 1) + p(\varepsilon + 1 - 1)\Big]$$

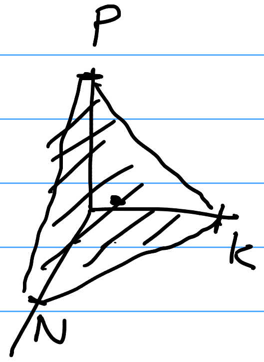
$$= \frac{1}{3}\varepsilon[k + n + p] = \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \Delta \subset \beta\left((\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\right)$$

$\Rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \beta\left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right) \Rightarrow$ je to NE je to také ESS?

Chtěli bychom $\pi(\tilde{x}, y) > \pi(y, y) \quad \forall y \in \Delta$

neboli $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) A \begin{pmatrix} k \\ n \\ p \end{pmatrix} - (k, n, p) A \begin{pmatrix} k \\ n \\ p \end{pmatrix} > 0$

$$\frac{1}{3}\varepsilon - \underbrace{(k, n, p) \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ n \\ p \end{pmatrix}}_{= \varepsilon(k^2+n^2+p^2)} \overset{?}{>} 0$$



$$\varepsilon\left(\frac{1}{3} - (k^2+n^2+p^2)\right) \overset{?}{>} 0$$

$k+n+p = 1 \implies k^2+n^2+p^2 \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$k, n, p \in [0, 1]$

$\varepsilon > 0$ neplatí ... není ESS

$\varepsilon = 0$ není ESS

$\varepsilon < 0$ platí je ESS

Příklad NE, které není ESS.

Př Dynamika hry Hrdlička - jestřáb

$(h, j) = (h, 1-h)$

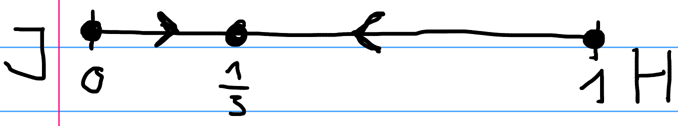
$h' = \alpha_1 h \qquad \alpha_1 = (1, 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 1-h \end{pmatrix} - (h, 1-h)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 1-h \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 = 2h - \left[2h^2 + \underbrace{(6+0)}_{=6}(1-h)h - 2(1-h)^2\right] =$$

$$2h - 2h^2 + 6h^2 - 6h + 2 + 2h^2 - 4h = 6h^2 - 8h + 2$$

$$h_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{12} = \frac{8 \pm 4}{12} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right.$$

$$h' = \underbrace{(h-1)}_{<0}\left(h - \frac{1}{3}\right)\underbrace{h}_{>0} \cdot 6$$



$h' < 0 \qquad h > \frac{1}{3}$

$h' \geq 0 \qquad h < \frac{1}{3}$

<u>ZÁVĚR</u>: $[0,1] = J$, $[1,0] = H$ jsou stacionární a přitom nejsou NE

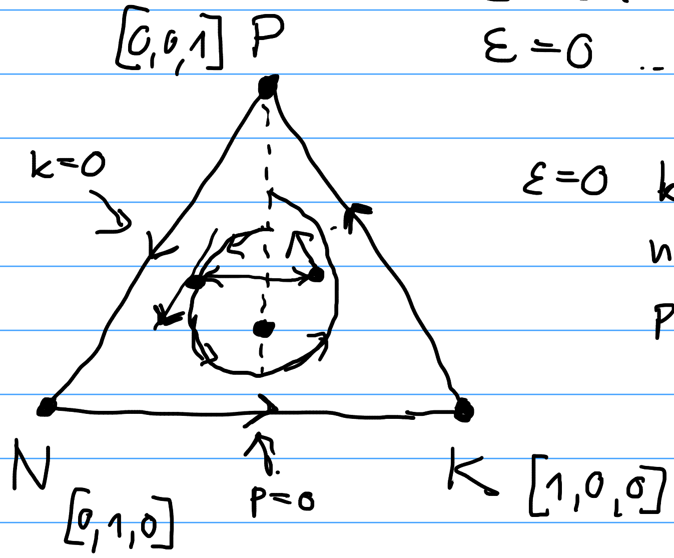
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ... dosud jsme věděli že se jedná o NE, ESS
mají navíc: Asymptoticky stabilní stacionární bod

Př. Dynamika hry KNP modifikované $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

viz MAPLE

Víme $\varepsilon \geq 0$ není ESS, $\varepsilon < 0$ je ESS $\Big\}$ je NE

zjistili jsme
$\varepsilon > 0$ ... nestabilní
$\varepsilon < 0$ ... asymptoticky stabilní
$\varepsilon = 0$ ... nevíme



$\varepsilon = 0 \quad k' = (n-p)k$
$n' = (p-k)n$
$p' = (k-n)p$

$k = 0 \Rightarrow n' = pn > 0$
$p' = -np < 0$

$B_1 \ [n,k,p]$
$B_2 \ [k,n,p]$ souměrné

derivace v B_1 = − derivace v B_2
k,n,p
lze vidět po dosazení
$p = 1 - k - n$

$\Rightarrow$ křivky kolem symetrické $\Rightarrow$ periodické řešení
$\Rightarrow$ stabilita, ale ne asymptotická.

VĚTA: 1) $\tilde{x}$ je NE $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ je stacionární bod (RD)
2) $\tilde{x}$ je stabilní stacionární bod (RD) $\Rightarrow$ je NE.

Pz: neplatí stac. bod $\Rightarrow$ NE

dk: 1) $\tilde{x}$ je NE $\Rightarrow$ $\tilde{x} \in \beta(\tilde{x})$ a také
$e^i \in \beta(\tilde{x})$ $\forall i \in C(\tilde{x})$

i ... buď $i \notin C(\tilde{x}) \Rightarrow x_i = 0$ $\quad x_i' = \alpha_i \cdot x_i \Rightarrow x_i' = 0$ ✓

nebo $i \in C(\tilde{x}) \Rightarrow e^i \in \beta(\tilde{x})$ $\quad e^i A \tilde{x} = \tilde{x} A \tilde{x}$
$x_i' = \alpha_i x_i$ $\quad \alpha_i = e^i A \tilde{x} - \tilde{x} A \tilde{x} = 0$ ✓

2) $\tilde{x}$ je stabilní stac. bod, sporem: nechť není NE

$\exists y \in \Delta$ $\quad y A \tilde{x} > \tilde{x} A \tilde{x}$
$\Rightarrow \exists j \quad e^j A \tilde{x} > \tilde{x} A \tilde{x}$

OPRAVENO:

$\Rightarrow e^j A x - x A x > \alpha > 0$ na nějakém okolí $\tilde{x}$

$\Rightarrow x_j' = \alpha_j x_j \geq \alpha x_j \Rightarrow x_j(t) \geq x_j(0) \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ nestabilita

$\square$

VĚTA: Pokud $\tilde{x}$ je ESS pak je asymptoticky stabilní stacionární bod (RD).

Pz: opačná implikace neplatí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{18}\right)$$ je As. stab. stac. bod, není ESS.

myšlenka dk: $H(y) = \sum_{i \in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \ln \frac{\tilde{x}_i}{y_i}$ $\quad y \in Q_{\tilde{x}} = \{ y \in \Delta : C(\tilde{x}) \subset C(y) \}$

Ukážeme: 1) $H(\tilde{x}) = 0$ & $H(y) > 0 \ \forall y \in Q_{\tilde{x}} \setminus \{\tilde{x}\}$

2) x řešení (RD) $\Rightarrow \frac{d}{dt} H(x(t)) < 0$

$\Rightarrow H$ je Ljapunovská funkce $\Rightarrow$ asymptotická stabilita $\square$

<u>VĚTA</u> („základní věta přírodního výběru") Nechť je matice A symetrická, pak $\frac{d}{dt} \pi(x(t)) \geq 0$ pro lib. řešení x rovnice (RD), přičemž rovnost nastává právě ve stacionárních bodech.

<u>dk:</u> $\pi(x(t)) = x^T A x(t)$

chybí T

$$\frac{d}{dt} \pi(x(t)) = x'^T A x + x^T A x' = 2 x' A x =$$

$$\left(x A x' = (x^T A x')^T = x'^T A^T x = x'^T A x \right)$$

OPRAVENO:

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i' (Ax)_i = 2 \sum_{i=1}^{n} (\cancel{x_i} e^i A x - x A x) x_i (Ax)_i$$

$$= 2 \sum (\pi(\cancel{x_i} e^i, x) - \pi(x,x)) x_i \pi(\cancel{x_i} e^i, x) - \underbrace{\sum x_i (\pi(e^i, x) - \pi(x,x))}_{=0, \text{ protože}}$$

$$\sum x_i \pi(e^i, x) = \pi(\textstyle\sum x_i e^i, x) = \pi(x,x)$$

a $\sum x_i \pi(x,x) = 1 \cdot \pi(x,x)$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i (\pi(x_i e^i, x) - \pi(x,x))^2 \geq 0$$

rovnost nastává $\Leftrightarrow \pi(x_i e^i, x) = \pi(x,x) \ \forall i \in C(x)$

tj $\forall i$ je $d_i = 0$ nebo $x_i = 0$

$\rightarrow$ stacionární bod $\square$

Příště ... Hrdlička – jestřáb

přidáme další strategie křiklouna (bully)
odvetník (retaliator).