$y' = h(x)\cdot g(y)$ $\qquad$ $y'(x) = a(x)\cdot y(x) + b(x)$

Věta L8.4 (o řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)

Nechť $(c,d)\subset\mathbb{R}$ je interval, $x_0\in(c,d)$ a $a,b:(c,d)\to\mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Maximální řešení rovnice $y'(x)=a(x)\cdot y(x)+b(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0)=y_0$ má tvar
$$y(x)=\left(\int_{x_0}^{x} b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt\right)\cdot e^{A(x)} + y_0\cdot e^{A(x)} \quad \text{pro } x\in(c,d),$$
kde A je primitivní k a splňující $A(x_0)=0$.

<u>Dk:</u> Zřejmě $y(x_0) = 0\cdot e^{A(x_0)} + y_0\cdot e^{A(x_0)} = y_0$ ✓.

Z věty 7.9 (odvození podle horní meze) $\left(\int_{x_0}^{x} b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt\right)' = b(x)\cdot e^{-A(x)}$.

Tedy $y'(x) = b(x)\cdot e^{-A(x)}\cdot e^{A(x)} + \left(\int_{x_0}^{x} b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt\right)\cdot e^{A(x)}\cdot a(x) + y_0\cdot e^{A(x)}\cdot a(x)$

a $a(x)\cdot y(x) + b(x) = a(x)\cdot\left(\int_{x_0}^{x} b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt\right)\cdot e^{A(x)} + a(x)\cdot y_0\cdot e^{A(x)} + b(x)$

Tedy $y(x)$ řeší naši ODR s poč. podm. $y(x_0)=y_0$ na celém (c,d).

<u>Jednoznačnost:</u> Nechť $y(x)$ a $z(x)$ řeší, pak $u(x) = y(x) - z(x)$

$y'(x) = a(x)\cdot y(x) + b(x)$ $\quad / - \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a(x)\cdot u(x),\ u(x_0)=0$

$z'(x) = a(x)\cdot z(x) + b(x)$ $\qquad$ ($u\equiv 0$ řeší)

$\Rightarrow (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = a(x) \Rightarrow \ln|u(x)| = A(x) + C \Rightarrow u(x) = e^{A(x)}\cdot\tilde{C}$ kde $\tilde{C}\in\mathbb{R}$

Z $u(x_0)=0 \Rightarrow \tilde{C}=0 \Rightarrow u\equiv 0 = y(x)-z(x)$ ✓

□

Postup pro řešení rovnice $y' = a(x) \cdot y + b(x)$:

a) Vyřešíme rovnici $y'(x) = a(x) \cdot y(x)$ (separované proměnné). Vyjde

$$y(x) = K \cdot e^{A(x)} \text{ pro } K \in \mathbb{R},$$

kde $A(x)$ je primitivní k $a(x)$.

b) Hledáme jedno partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = K_0(x) \cdot e^{A(x)}.$$

Dosazením

$$y'(x) = \left(K_0(x) \cdot e^{A(x)}\right)' = K_0'(x)\, e^{A(x)} + K_0(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x)$$

do rovnice

$$K_0'(x) \cdot e^{A(x)} + \cancel{K_0(x) \cdot e^{A(x)}\, a(x)} = y'(x) = a(x) y(x) + b(x) = \cancel{a(x) \cdot K_0(x) \cdot e^{A(x)}} + b(x)$$

~~Ad~~ Odtud $K_0'(x) = e^{-A(x)} \cdot b(x)$, a tedy $K_0(x)$ spočteme jako primitivní k $e^{-A(x)} \cdot b(x)$.

c) Řešení je celkově partikulární řešení z b) plus obecné řešení homogenní rovnice z a)

$$y(x) = K_0(x) \cdot e^{A(x)} + c \cdot e^{A(x)}.$$

Příklady: (1) $y' = x \cdot y + x$

a) vyřešíme $y' = x \cdot y$, $y \equiv 0$ řeší $\qquad \frac{dy}{dx} = x \cdot y$

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \implies y(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{C} = \underline{K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

b) hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_0(x) = K_0(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

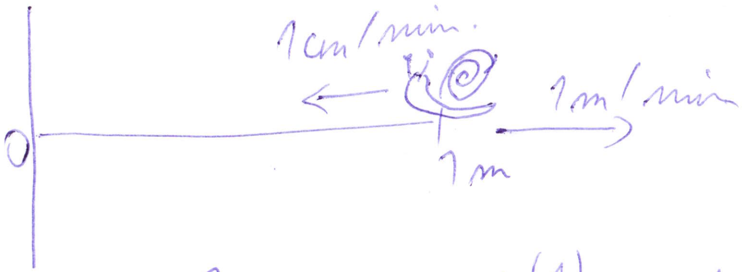
$$y_0' = K_0' \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + \cancel{K_0 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = x \cdot y_0 + x = \cancel{x \cdot K_0 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} + x$$

$$K_0'(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \implies K_0 = \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\implies y_0(x) = K_0(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -1$$

c) obecné řešení je $y(x) = -1 + K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$

(2) (PRAKTICKÝ)



Za jak dlouho dojde ke zdi?

$1+t$ .. délka gumy v čase t

$y(t)$ poloha šneka v čase t

$y(0) = 1$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = -\frac{1}{100} \Delta t + \underbrace{\frac{y(t)}{1+t}}_{\text{procento gumy před šnekem}} \Delta t$$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{100} + \frac{y(t)}{1+t} \qquad / \Delta t \to 0$$

$$y'(t) = -\frac{1}{100} + \frac{y(t)}{1+t} \qquad y(0) = 1.$$

$y'(t) = -\frac{1}{100} + \frac{y(t)}{1+t}$ $\quad y(1) = 0$.

a) $y'(t) = \frac{y(t)}{1+t}$ $\quad y \equiv 0$ řeší $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+t}$

$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + C, \; t \in (-1, \infty)$

$|y(t)| = e^{\ln(1+t) + c} = (1+t) \cdot e^c \Rightarrow y(x) = K \cdot (1+t)$ na $(-1, \infty)$, $K \in \mathbb{R}$

b) hledáme partikulární řešení $y_0(t) = K_0(t) \cdot (1+t)$

$y_0' = K_0' \cdot (t+1) + \cancel{K_0} = -\frac{1}{100} + \frac{y_0}{1+t} = -\frac{1}{100} + \cancel{\frac{K_0(1+t)}{(1+t)}}$

$K_0' = -\frac{1}{100 \cdot (t+1)} \Rightarrow K_0 = -\frac{1}{100} \cdot \ln(t+1)$ $\quad t \in (-1, \infty)$

$y_0(t) = -\frac{1}{100} \cdot \ln(t+1) \cdot (1+t)$

c) obecné řešení $y(t) = -\frac{1}{100} \cdot \ln(t+1) \cdot (1+t) + K \cdot (1+t)$ na $(-1, \infty)$ pro $K \in \mathbb{R}$

poč. podm.: $y(0) = 1$ $\quad 1 = -\frac{1}{100} \cdot \ln(1) \cdot 1 + K \cdot (1+0) \Rightarrow K = 1$

$y(t) = -\frac{1}{100} \ln(t+1) \cdot (1+t) + (1+t)$ $\quad \overset{?}{} \; y(t) = 0$

$0 = -\frac{1}{100} \cdot \ln(t+1) \cdot (1+t) + (1+t) = (1+t) \cdot \left(-\frac{1}{100} \cdot \ln(t+1) + 1\right)$

$\Rightarrow t = e^{100} - 1$ minut

8.3. Systémy lineárních ODR a lineární rovnice n-tého řádu

Def Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme funkce $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$.
Lineární ODR řádu n nazveme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\cdot y' + a_0 \cdot y = b(x) \quad \text{pro } x \in I$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad: $y'' + y = 1$

Def Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, mějme funkce $b, y : I \to \mathbb{R}^n$ a ~~mějme~~ mějme maticovou funkci $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}$. Systémem ODR prvního řádu nazveme systém rovnic

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2 + \dots + a_{1,n}\cdot y_n + b_1 \\
y_2' &= a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 + \dots + a_{2,n}\cdot y_n + b_2 \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}\cdot y_1 + a_{n2}\cdot y_2 + \dots + a_{nn}\, y_n + b_n
\end{aligned}$$

~~neboli~~ neboli v maticovém zápisu $y' = A\cdot y + b$

Je-li $b \equiv 0$, pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 - x \end{aligned}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} \overset{A(x)}{=} A\cdot y + b$$

Poznámka: Řešení jedné rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic řádu 1:

Nechť y řeší $y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)\cdot y'(x) + a_0(x)\cdot y(x) = b(x)$ ⊛

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Pak n funkcí $u_1(x) = y(x),\ u_2(x) = y'(x),\ \dots,\ u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$

řeší soustavu

$$
\begin{aligned}
u_1' &= u_2\\
u_2' &= u_3\\
&\ \vdots\\
u_{n-1}' &= u_n\\
u_n' &\overset{⊛}{=} b(x) - a_{n-1}(x)\cdot u_n(x) - \dots - a_0(x)\, u_1(x)
\end{aligned}
$$

s počáteční podmínkou

$u_1(x_0) = y_0,\ u_2(x_0) = y_1,\ \dots,\ u_n(x_0) = y_{n-1}$.

V dalším si tedy vyslovíme věty pro soustavy n rovnic řádu 1, které mají okamžité analogické důsledky pro jednu rovnici řádu n.

Naopak řešení systému n rovnic řádu 1 lze občas, ale ne vždy, převést na jednu rovnici řádu n.