Algebra — cvičení 9

(příklady cihlovou barvou jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

v komutativní grupě G: g, h konjugované <==> g = h

Podgrupy a Lagrangeova věta

Definice: g, h konjugované v grupě (G,.,), pokud existuje c z G, že c.g.c^{-1} = h

1. Určete počet prvků množiny všech permutací v $\mathbb{S}_5$, které jsou konjugované se $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

   Tvoří tato množina podgrupu v $\mathbb{S}_5$?

2. Najděte nejmenší podgrupu $H \leq \mathbb{S}_5$ (tj. vypište všechny prvky této podgrupy), která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3) \circ (3\,4\,5)$.= (1 2 3 4 5)

   {(1 2 3 4 5), pí^2 = (1 3 5 2 4), (1 4 2 5 3), (1 5 4 3 2), id}

3. Ukažte, že platí:

   (a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$

   (b) $\langle (1,0),(0,1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   (c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{NSD}(a,b)\mathbb{Z}$

   (d) $\langle \{(a\,b) \mid a, b \leq n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

   (e) $\langle \{(a \quad a+1) \mid a < n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$ vzhledem k (d) stačí pro každé k < m ukázat

   (k m) = (k k+1)(k+1 k+2)...(m-2 m-1)(m-1 m)(m-2 m-1)...(k+1 k+2)(k k+1)

   (f) $\langle \{(1\,2), (1 \ldots n)\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

   pozor <{(1 3), (1 2 3 4)}>_{S_4} = D_8

4. Rozhodněte, zda existuje v grupě $\mathbb{S}_{17}$ prvek řádu

   (a) 71, (b) 72, (c) 80.

5. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?

Homomorfismy

f:G --> H homomorfismus,
pak ord(f(g)) | ord(g)

6. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy

   (a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$

   (b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$

   (c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$

   (d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$

   (e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$

   (f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$

   (g)* ze Z_m do Z_n, kde m, n>1 přirozená

   (a) pro každé k celé tvrdím, že f_k(x) = k.x je homomorfismus;
   to jsou všechny homomorfismy (určené obrazem generátoru 1)

   (c) pouze triviální homomorfismus - "vše na nulu";
   f... homomorfismus... $f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{n-krát}}) = f(0) = 0 = \underbrace{f(1)+\ldots+f(1)}_{\text{n-krát}} \Rightarrow f(1)=0$

   (f) triviální homomorfismus (vše na identitu); dále cokoliv, co posílá
   1 na permutaci řádu 2
   (např. transpozici či nezávislé složení
   transpozic)

7. Dokažte, že zadané grupy nejsou izomorfní: (a) $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; (b)* $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

8.* Uvažujme grupu $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Ukažte, že:

(a) zde mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik;

(b) ji nelze nagenerovat žádnou konečnou podmnožinou.

9.* Buď $n \geq 4$.

(a) Ukažte, že permutaci $\pi = (a\,b)(c\,d)$ sestávající ze dvou disjunktních cyklů lze napsat jako součin trojcyklů.

(b) S využitím předchozího bodu si rozmyslete, že každou sudou permutaci lze napsat jako součin trojcyklů.

(c) Uvědomte si, že jste právě ukázali, že $\mathbb{A}_n$ je pro $n \geq 3$ generována trojcykly.

10.* Buď $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\}$ grupa s operací maticového násobení.

(a) Ukažte, že $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\}$ je podgrupa v $\mathbf{G}$.

(b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.)

(c) Najděte nějakou levou/pravou transverzálu rozkladu.

11.* Dokažte, že jsou navzájem izomorfní grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$, $K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq \mathbb{S}_4$.

12.* Dokažte, že grupy $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{A}_4$ a $\mathbb{Z}_{12}$ jsou po dvou neizomorfní.

13.* Dokažte, že všechny (aditivní) grupy $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, jsou navzájem izomorfní.