

## 9. cvičení z PSt — 27.4.2021

Připomeňte si:

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

- dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta)

$$\int_X \int_Y f(x,y)dydx = \int_Y \int_X f(x,y)dx dy.$$

Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu  $\infty - \infty$ “, neboli  $\int_X \int_Y |f(x,y)|$  musí být konečný

- pro „rozumnou“ množinu  $A$

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)dx dy.$$

- nezávislost  $X, Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$
- $\mathbb{E}(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$
- $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$

### Sdružená hustota

1. Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu  $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$  pro  $x,y > 0$  (a 0 jinak).

- Určete marginální hustoty  $f_X, f_Y$ .
- Určete také distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$ .
- Jsou  $X, Y$  nezávislé?
- Najděte  $P(X+Y \leq 1)$  a  $P(X > Y)$ .

2. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočtěte pomocí ní  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Pro kontrolu spočtěte  $\mathbb{E}(Y)$  přímo (pomocí pravidla LOTUS).

### Konvoluce

3. Buďte  $X, Y, Z \sim U(0,1)$  nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení  $X+Y$ ? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení  $X+Y+Z$ ? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu  $[0,1]$ .

(c) Jak výsledek ověřit sámkováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Rku, nebo jen popište, co byste dělali.)

4. Buďte  $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$  nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení  $X+Y$ ?
- Jaké je rozdělení  $X+Y+Z$ ?

## Podmíněná střední hodnota

5. Nechť  $X$  je n.v. s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{pro } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme  $A$  jev  $\{X \geq 2\}$ .

- (a) Spočítejte  $\mathbb{E}(X)$ ,  $P(A)$ ,  $f_{X|A}$  a  $\mathbb{E}(X | A)$ .
- (b) Označme  $Y = X^2$ . Spočítejte  $\mathbb{E}(Y)$  a  $\text{var}(Y)$ .

## Podmíněná hustota

6. Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- (b) Určete podmíněnou hustotu  $f_{Y|X}$ .

7. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme  $Y$ . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme  $X$ .

- (a) Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ . Může vám pomoci podmíněná hustota  $f_{X|Y}$ .
- (b) Najděte marginální hustotu  $f_X$ .
- (c) Pomocí  $f_X$  spočítejte  $\mathbb{E}(X)$ .
- (d) Spočítejte  $\mathbb{E}(X)$  pomocí vztahu  $X = Y \cdot (X/Y)$ .

8. Metrový klacek rozložíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)

- (a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- (b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- (c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

9. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$  a  $[1, 0]$ , tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- (a) Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- (b) Najděte marginální hustotu  $f_Y$ .
- (c) Najděte podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- (d) Spočítejte  $\mathbb{E}(X | Y = y)$  a podle věty o rozboru možností spočítejte  $\mathbb{E}(X)$  (pomocí  $\mathbb{E}(Y)$ ).
- (e) Spočítejte  $\mathbb{E}(X)$  pomocí předchozí části a symetrie.