Algebrou proti koronaviru VIII

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Grupy a jejich základní vlastnosti

1. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Dokažte, že

   (a) pokud prvek $e \in G$ splňuje $e \cdot g = g$ nebo $g \cdot e = g$ pro nějaké $g \in G$, pak $e = 1$.

   (b) pokud prvek $h \in G$ splňuje $h \cdot g = 1$ nebo $g \cdot h = 1$, pak $h = g^{-1}$.

   (c) rovnice $g \cdot x = h$ má pro každá $g, h, \in G$ právě jedno řešení

   (d) podmnožina $\emptyset \neq M \subseteq G$ je podgrupou právě tehdy, obsahuje-li pro každé dva prvky $a, b \in M$ i prvek $a \cdot b^{-1}$

2. Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají nějaké binární grupovou operaci $\cdot$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \cdot y$. Doplňte zbytek tabulky.

(a)

	a	b
a	a	b
b	b	a

(b)

	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

3. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby následující čtveřice byly grupami:

   (a) $(\mathbb{Q}^+, \cdot, ', e)$

   (b) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$,

   (c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$, kde $a * b = |a \cdot b|$,

[(a)ano (b) ne, mínus není asociativní, (c) ne, pro $a < 0$ by bylo $a = a * e = |a \cdot e| \geq 0$]

Řád prvku v grupě

4. Jaký řád mají následující prvky v daných grupách?

   (a) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,

   (b) 7 v $\mathbb{Z}_{20}^*$,

   (c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$,

   (d) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{S}_9$,

   (e) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{A}_{2020}$,

   (f) rotace o $144°$ v $\mathbf{D}_{10}$,

   (g) rotace o $144°$ v $\mathbf{D}_{20}$,

   (h) prvek k v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}$,

   (i) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$,

   (j) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu $\mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_4$.

[(a) 75 a 5, (b) 4, (c) ∞ a ∞, (d) 12, (e) 12, (f) 5, (g) 5, (h) 4, (i) 3, 6, ∞, 8, (j) 12]

5. Doplňte následující tabulku, kde v buňce v řádku k a sloupci $\mathbf{G}_n$ bude nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že grupa $\mathbf{G}_n$ bude obsahovat prvek řádku k. Raději předpokládejte, že $\mathbf{D}_{2n}$ je definováno jen pro $n \geq 3$.

	$\mathbf{S}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbf{D}_{2n}$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$
2	2	2	3	1	1	2
4	4	4	4	2	1	2
11	11	11	11	2	1	2
12	7	12	12	2	1	2
1024	1024	1024	1024	2	1	2

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

6.* Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají nějaké binární grupovou operaci $\cdot$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \cdot y$. Doplňte zbytek tabulky.

	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	e	f	d
c	c	a	b	f	d	e
d	d	f	e	a	c	b
e	e	d	f	b	a	c
f	f	e	d	c	b	a

7.* Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby čtveřice $(\mathcal{P}(X), \Delta, ', e)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X a Δ je symetrická diference: $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ byla grupou. [ano]

8.* Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je *konečná* grupa a H neprázdná podmnožina G. Dokažte, že H tvoří podgrupu G právě tehdy, když je uzavřená na operaci $\cdot$ (tj. $\forall x, y \in H\colon x \cdot y \in H$).

9.* Nalezněte grupu G a její podmnožinu H, která bude uzavřena na grupovou operaci, ale nepůjde o podgrupu. [Např. $G = \mathbb{Z}$ se sčítáním, $H = \mathbb{N}$]

10.* Dokažte, že grupa, ve které má každý nejednotkový prvek řád 2, je už nutně komutativní.