(S)1.3.4. Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn dvěma stejně velkými dielektriky o permitivitách ε1a ε2. Jaká bude kapacita kondenzátoru, je-li rozhraní mezi dielektriky
a) rovnoběžné s elektrodami
b) kolmé k elektrodám?
Čemu bude roven poměr obou kapacit?

DÚ

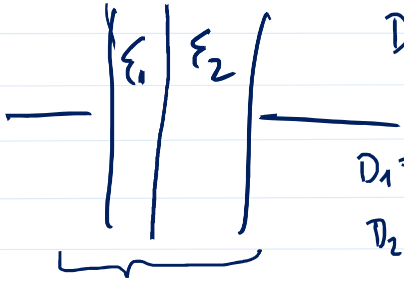
$C = \frac{Q}{U}$ $E = \frac{U}{d}$

$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 \frac{U}{d}$ $E_1 = E_2$

$D_2 = \varepsilon_2 E_1 = \varepsilon_2 \frac{U}{d}$

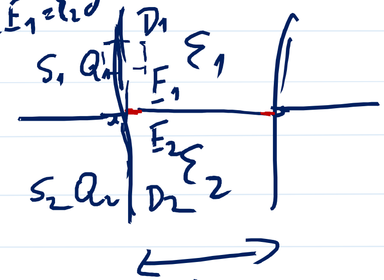
a) $C_a = \frac{1}{\frac{d}{2\varepsilon_1 S} + \frac{d}{2\varepsilon_2 S}} = \frac{2S}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}$

b) $C_b = \frac{S}{d} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_1 S}{d\,2} + \frac{\varepsilon_2 S}{d\,2}$



$D_1 = \frac{Q_1}{S_1}$

$D_2 = \frac{Q_2}{S_1}$



$S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$

$Q_1 + Q_2 = Q$

+ S 1.2.2. Okolik voltů by se zvětšil potenciál Země, kdyby se na jejím povrchu rozprostřel náboj 1C.

Jaká je kapacita Země

$C_Z = 7 \times 10^{-4}$ F

$V = 1{,}4 \times 10^{3}$ V

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_Z}$

$\Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R_Z$

DÚ

Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce

Přesněji: za využití výsledku získaného na cvičení (viz dole)

vyjádřete E_z pro $0<z<h$ uvnitř válce

pro intenz. na ose E_z pro $z>h$ vně válce

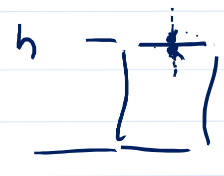
vyjádřete indukci $\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{D_z}$ na ose také uvnitř a nad válcem

a ověřte chování normálových složek $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na horní podstavě válce.

tj E_z pr $z \to h$ zdola / shora

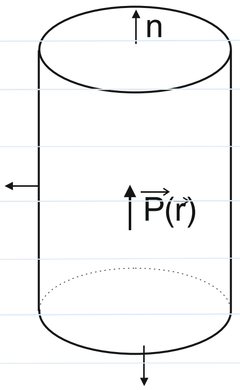
σ_v

E_z - má nespojitost $\frac{P_0}{\varepsilon_0}$



D_z - je spojité

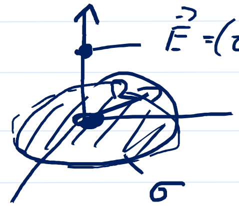
Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce



$\vec{P}(\vec{r})=(0,0,P_0)$

$\vec{P}(\vec{r})=0$ vně válce

Pole nabitého kruhu v počátku



$\vec{E}=(0,0,E_z)$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z>0$$

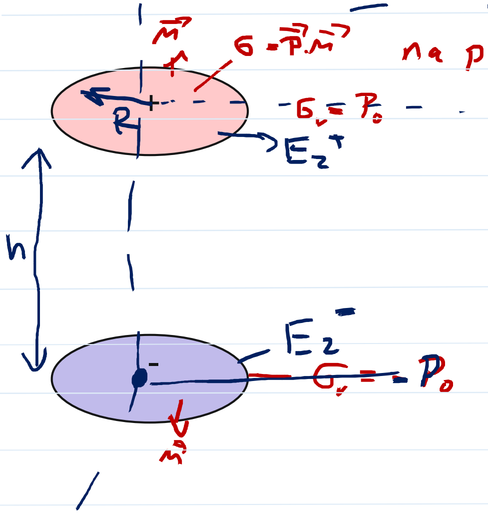
$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z<0$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} \quad \text{pro } \forall z$$

lze nahradit objemovými náboji $\rho_v = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$

a plošnými σ $\quad \vec{P}\cdot\vec{n}$; na plášti válce $\vec{P} \perp \vec{n} \Rightarrow \sigma = 0$

$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$ na podstavách $\sigma = \pm P_0$



$z = h$

$z = 0$

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = \frac{-P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

Chování vektoru $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na ose

v místě podstavy

chování ve válci $\boxed{0 \le z \le h} \Rightarrow |z| = z \qquad |z-h| = h-z$

$$E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)(-1)$$

$$E_z\Big|_{z=h} = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) - \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-0\right) =$$

$$= -\frac{P_0}{\varepsilon_0} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\frac{h}{\sqrt{\quad}}$$

$\boxed{\text{DÚ}}$

totéž pro $z \ge h$ mají $E_z\Big|_{z \to h^+}$

ověřit chování $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\quad P_z = P_0$ ve válci

$D_z\big|_{z \to h^-}$ a $D_z\big|_{z \to h^+}$ $\quad D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z$ $\quad P_z = 0$ mimo válec

S **1.3.2** Osamocená vodivá koule poloměru R je nabita nábojem Q. Tato koule je obalena vrstvou dielektrika o tloušťce d, jehož permitivita je ε .

a/ Určete plošnou hustotu vázaného náboje na vnějším a vnitřním povrchu dielektrika.

b/ Určete objemovou hustotu vázaného náboje v dielektriku.

určit σ_p → souvisí s $\vec{P}$ $\quad \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$

určit ϱ_p v dielektriku $\quad \varrho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$

$\vec{P} = ?$ $\quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$ $\quad$ měkké $\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$

$\underbrace{\vec{P} = \vec{E}(\varepsilon - \varepsilon_0) = \vec{D}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}}$ $\quad \vec{P} = \chi_0\vec{E}$

G. P. – koule

ze symetrie $R < r < R+d$

$\phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q+Q_P}{\varepsilon_0}$?

$\phi_D = \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q$ – volný náboj

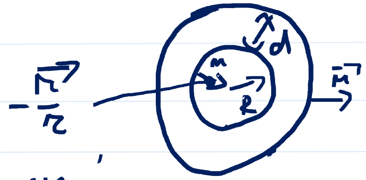
$\Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

pro $r > R$

$\vec{P}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$

$R < r < R+d$ $\quad$ $\vec{P}(r) = 0$ pro $r > R+d$

$$\vec{P}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{\vec{r}}{r}$$



$\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$ $\qquad$ $\vec{n}$ vnější normála k zpolarizovanému objemu

a) $\sigma_p\big|_{r=R}$ na vnitřní ploše diel. vrstvy

$$= -\frac{Q}{4\pi r^2}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big|_{r=R} = \underline{\underline{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi R^2}}}$$

celkový náboj indukovaný na vnitř. ploše diel. $\sigma_p(R)\cdot 4\pi R^2 = \boxed{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,Q}$

$r = R + d$

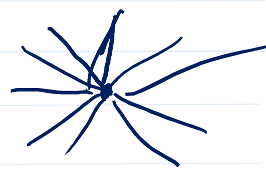
$$\sigma_p\big|_{r=R+d} = +\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi(R+d)^2}$$

na vnější $= +\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,Q$

b) $\underbrace{\rho_P}_{} = -\operatorname{div}\vec{P}(r) = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{Q}{4\pi}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0.$

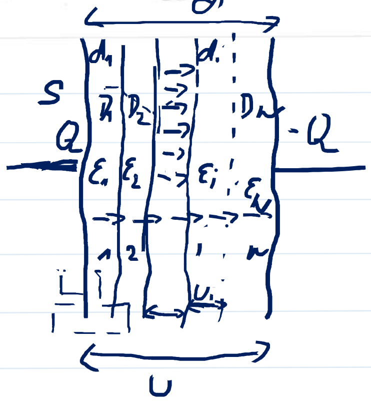
$$\underbrace{\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}}_{} = 0$$

pole bodového náboje $\sim \frac{\vec{r}}{r^3}$



S **1.3.3.** Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn n vrstvami homogenních dielektrik o permitivitách ε_1, ε_2 ... ε_n. Rozhraní mezi dielektriky jsou rovnoběžné s elektrodami kondenzátoru. Tloušťky vrstev jsou d_1, d_2 ... d_n. Jaká bude kapacita kondenzátoru?

homogenní – po částech



co víme o $E = \frac{U}{d}$ ||

co víme o $\vec{D}$

$E_i = \frac{U_i}{d_i}$

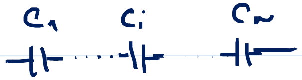
$U_i = E_i d_i = \frac{D_i}{\varepsilon_i} d_i$

$U = U_1 + \dots U_n = \sum_1^n U_i = \sum_1^n \frac{D_i}{\varepsilon_i} d_i = D \sum_1^n \frac{d_i}{\varepsilon_i} = \frac{Q}{S} \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i}$

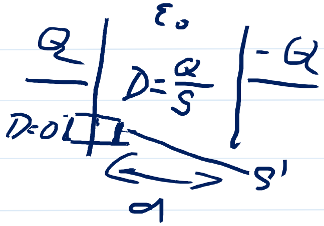
$C = \frac{Q}{U} = S \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i S}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$

$\frac{\varepsilon_i S}{d_i} = C_i$

$D_i = ?$ $D_i = \varepsilon_i E_i$



$D_i = \sigma = \frac{Q}{S} = D$

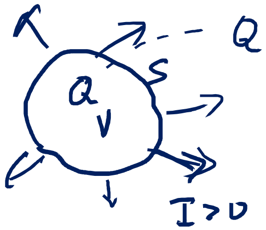


$S'D = \sigma S'$ – volného náboje

$C =$

(S) 2.1.1. Uvnitř homogenního izotropního tělesa o vodivosti σ nechť v okamžiku t=0 existuje volný náboj o hustotě ϱ_0. Jak se bude tento náboj měnit s časem? Odhadněte konkrétní hodnoty pro měď (σ= 0,6×10^8 $(\Omega m)^{-1}$) a izolant – sklo (σ= 0,6×10^8 $(\Omega m)^{-1}$). Relativní permitivitu položte řádově rovnu jedné.

$\varepsilon_r = 1 \qquad \varepsilon = \varepsilon_0$



$Q = \int_V \varrho \, dV$ → rovnice kontinuity

$-\dfrac{dQ}{dt} = I = \oint_S \vec{j} \, d\vec{S}$

$\int_V \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

$\int_V \underbrace{\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right)}_{=0} dV = 0$ platí pro $\forall V$

$\operatorname{div} \vec{j} + \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad \operatorname{div} \vec{j} = \sigma \operatorname{div} \vec{E} = \sigma \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$ → $\sigma \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0} + \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

$\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$

τ Cu $\sim 10^{-19}$ s

sklo ~ 10 s

$\varrho(t, \vec{r})\big|_{t=0} = \varrho_0(\vec{r})$

$\varrho(t)\big|_{t=0} = \varrho_0$

$\varrho(t, \vec{r})\big|_{t \to \infty} = 0$

$\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = -\sigma \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$

$\dfrac{\partial \varrho}{\varrho} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \partial t$

$\ln \varrho = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} t + K$

$\varrho = A e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t}$

$\varrho\big|_{t=0} = \varrho_0 \Rightarrow A = \varrho_0$

$\varrho(t, \vec{r}) = \varrho_0(\vec{r}) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t}$

$= \varrho_0 e^{-t/\tau} \; , \; \tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\sigma}$