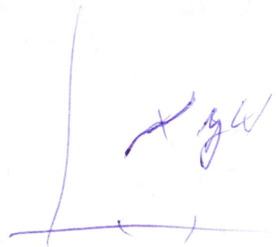
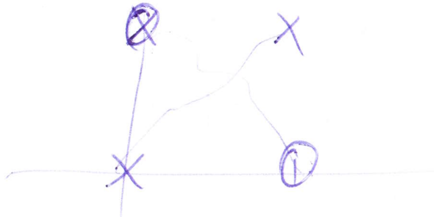
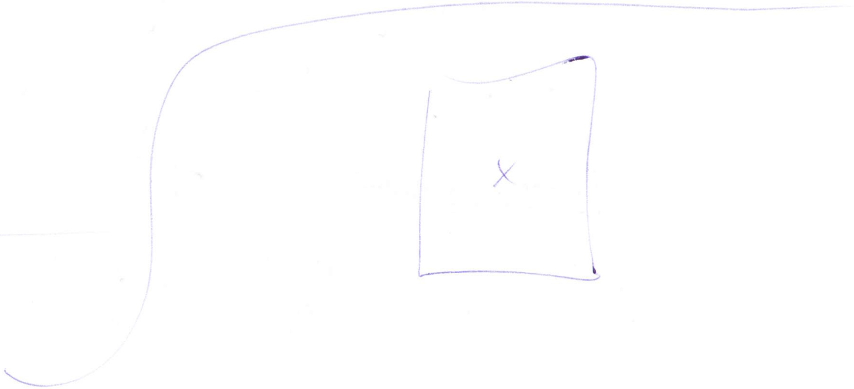
$y'(x) = f(x, y(x))$

- (Peano) f spojitá $\Rightarrow$ lokálně $\exists$ řešení
- (Picard) navíc f lipsch. v y $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ lokálně $\exists!$ řešení

KVÍZ: y_1, y_2 řeš. $y' = f(x, y(x))$

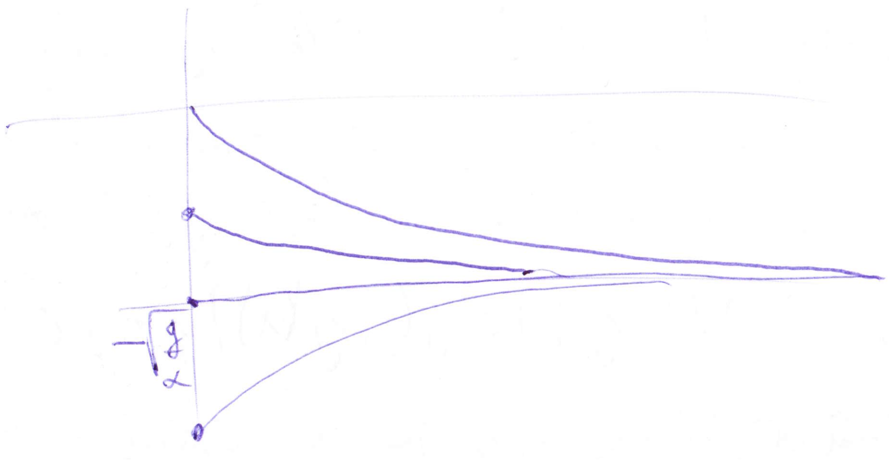






8.2 Rovnice prvního řádu

Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $f: \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. V této kapitole studujeme pouze rovnice typu $y'(x) = f(x, y(x))$.



$$\boxed{(G^{-1}(y))' = \frac{1}{G'(G^{-1}(y))}}$$

Speciální tvary:

(i) $y'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ $y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$y(x_0) = y_0$ $\quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

(ii) $y'(x) = g(y(x))$

(iii) $y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x)$ (separované proměnné)

(iv) $y'(x) = h\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ (homogenní rovnice)

- substitucí $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ převedeme na (iii)

(v) $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)

(vi) $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y(x)^{\alpha}$ (Bernoulliho rovnice)

substitucí $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ převedeme na (v)

(iii) Hrubý nástin řešení

$y' = g(y) \cdot h(x)$

$\frac{y'}{g(y)} = h(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int h(x)\,dx$

G primitivní k $\frac{1}{g}$

H primitivní k h

$\Rightarrow G(y(x)) = H(x) \Rightarrow y(x) = G^{-1}(H(x))$

$\boxed{\text{Věta T 8.3}}$ (o existenci řešení separované rovnice)

Nechť $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g: (c,d) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (c,d)$ prochází právě jedno řešení rovnice $y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x)$

$\left(y(x_0) = y_0 \right.$

Dk: g je spojitá a nenulová $\Rightarrow$ nemění znaménko.

můžeme definovat $H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt$ a $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,ds$.

g nemění znaménko $\Rightarrow$ G je monotónní $\Rightarrow$ $\exists\, G^{-1}$.

Chceme ukázat, že $y(x) = G^{-1}(H(x))$ je řešení.

h, g spojité $\Rightarrow$ $H', G', (G^{-1})'$ je spojitá

Podle derivace složené funkce a derivace inverzní funkce:

$$y'(x) = \left(G^{-1}(H(x))\right)' = (G^{-1})'(H(x)) \cdot H'(x) = \frac{1}{G'(\underbrace{G^{-1}(H(x))}_{y(x)})} \cdot h(x) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{g(y(x))}} \cdot h(x) = g(y(x)) \cdot h(x).$$

Ověříme, že splňuje počáteční podmínku: $H(x_0) = 0$, $G(y_0) = 0$

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

Jednoznačnost: Nechť $y(x)$ a $a(x)$ jsou řešení

$$y'(x) = g(y(x))\cdot h(x) \qquad a'(x) = g(a(x))\cdot h(x) \qquad y(x_0) = y_0 = a(x_0)$$

$$\overset{g \text{ nenulová}}{\Longrightarrow} \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x) = \frac{a'(x)}{g(a(x))} \qquad \Big/ \int_{x_0}^{x}$$

$$\underbrace{G(y(x_0))}_{=G(y_0)} \text{ : } \quad G(y(x)) - G(y(x_0)) = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{a'(x)}{g(a(x))} = G(a(x)) - \underbrace{G(a(x_0))}_{=G(y_0)}$$

$$\Longrightarrow \quad G(y(x)) = G(a(x)) \quad \overset{G \text{ monotónní}}{\Longrightarrow} \quad y(x) = a(x) \qquad \square$$

Postup pro řešení rovnice $y' = h(x)\cdot g(y)$:

(1) Určíme maximální intervaly I v D_h.

(2) Najdeme body, kde $g(c) = 0$. Tak $y(x) \equiv c$ je řešení. Určíme maximální intervaly J, kde je g nenulová.

(3) Pro $x \in I$ hledáme řešení s hodnotami v J rovnice $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x)$. Integrací $G(y(x)) = H(x) + C$, kde H je primitivní k h a G je primitivní k $\frac{1}{g}$.

(4) Zafixujeme c a hledáme řešení $y(x) = G^{-1}(H(x)+c)$. Toto je řešení na $\{x \in I : H(x) + c \in G(J)\}$

19-5

(5) Z řešení z (4) a konstantních řešení z (2) slepíme všechna maximální řešení.

Příklady: 1. $y' = y^2$

FORMÁLNĚ: $y \equiv 0$ je řešení na $\mathbb{R}$ $\quad \frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$

$$= \int \frac{1}{g}$$

$$G(y) = \int \frac{1}{s^2}\,ds = -\frac{1}{s} \qquad \left(G(y(x)) = \right) \frac{-1}{y(x)} = x + C$$

$$y(x) = \frac{-1}{x+C} \text{ je řešení na } (-\infty, -C) \text{ a na } (-C, \infty).$$

NEFORMÁLNĚ:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y(x)} = \int \frac{dy}{y^2} = \int dx = x + C$$

$\frac{-1}{x+C}$ nelze slepit s $y \equiv 0$.

$y' = x^2 \cdot y$ $\qquad y \equiv 0$ je řešení na $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x^2$$

(!) $\ln|y| = \int \frac{1}{y}\, dy = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^3}{3} + C} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^{C} \Rightarrow y(x) = \pm e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow y(x) = \tilde{C} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

toto nelze slepit s $y \equiv 0$

Celkem $y(x) = \tilde{C} \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$ na $\mathbb{R}$ pro $\tilde{C} \in \mathbb{R}$

---

3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ $\qquad y \equiv 1$ řešení na $\mathbb{R}$ $\qquad y \equiv -1$ řešení na $\mathbb{R}$

$$\arcsin y = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx = x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (y \in (-1,1))$$

$y(x) = \sin(x + C)$ řešení na $\left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right)$

v $\frac{\pi}{2} - C$ $\quad y(x) = \begin{cases} -1 & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - C\right] \\ \sin(x+C) & x \in \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right) \\ 1 & x \in \left[\frac{\pi}{2} - C, \infty\right) \end{cases}$

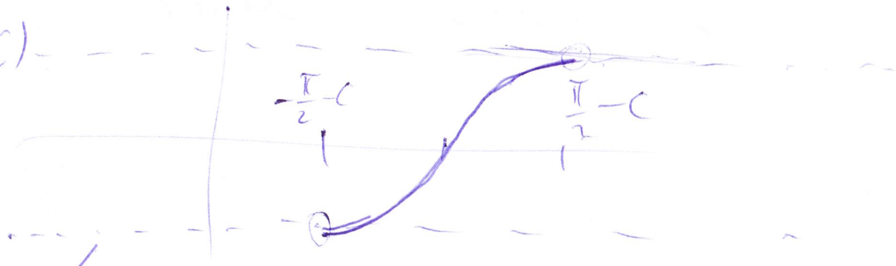
je spojitá

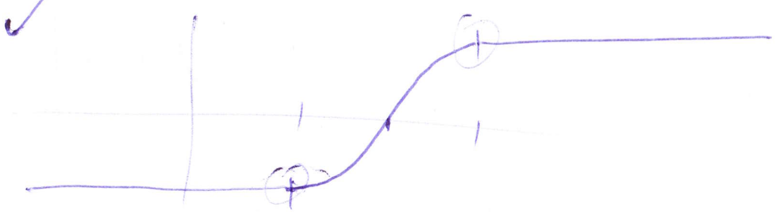
$y'\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = 0$ (detailněji) $= \sqrt{1 - (1)^2} =$

$= \sqrt{1 - \left(y\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right)^2}$ ✓

analogicky v $\left(-\frac{\pi}{2} - C\right)$ je zhlema

ODR

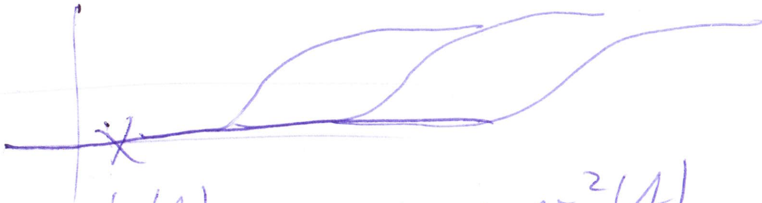




$y \equiv 1$ je řešení na $\mathbb{R}$

$y \equiv -1$ je řešení na $\mathbb{R}$ $\quad y(x) = \begin{cases} -1 & \ldots (-\infty, -\frac{\pi}{2} - c] \\ \sin(x+c) & \ldots (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c) \\ 1 & [\frac{\pi}{2} - c, \infty) \end{cases}$ je řešení na $\mathbb{R}$

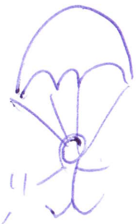
[19-7.



4. $v'(t) = -g + \alpha \cdot v^2(t)$

$-g + \alpha \cdot v^2 = 0$

~~$v \equiv \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ je mat. řešení~~



$v(0) = 0$

"$v < 0$"

$v \equiv -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ je řešení

$$\frac{dv}{v^2 - \frac{g}{\alpha}} = \alpha \, dx$$

$$\underline{\alpha \cdot t + C} = \int \frac{dv}{v^2 - \frac{g}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{g}} \left(\int \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{\alpha}}} - \int \frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{\alpha}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{g}} \cdot \ln \left| \frac{v - \sqrt{\frac{g}{\alpha}}}{v + \sqrt{\frac{g}{\alpha}}} \right| \implies \frac{v - \sqrt{\frac{g}{\alpha}}}{v + \sqrt{\frac{g}{\alpha}}} = \check{C} \cdot e^{2 \cdot \sqrt{g\alpha}\, t} \qquad \check{C} \in \mathbb{R}$$

$v(0) = 0 \qquad -1 = \check{C} \cdot e^0 \implies \check{C} = -1$

$$v(t) - \sqrt{\frac{g}{\alpha}} = -v(t) \cdot e^{2\sqrt{g\alpha}\, t} - \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot e^{2\sqrt{g\alpha}\, t}$$

$$\implies v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot \frac{1 - e^{2\sqrt{\alpha g}\, t}}{1 + e^{2\sqrt{\alpha g}\, t}} \xrightarrow[t \in [0,\infty)]{t \to \infty} -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$$