NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
8. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Spojité náhodné vektory

Kovariance a korelace

Nerovnosti

Limitní věty – aproximace

Co už známe

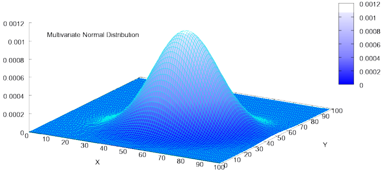
- sdružená distribuční funkce

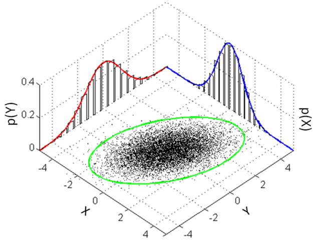
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \,\&\, Y \leq y).$$

- sdružená hustota: $f_{X,Y} \geq 0$ taková, že

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds.$$

- důležitý příklad: vícerozměrné normální rozdělení





Obrázek od editorů Wikipedie Piotrg a Bscan.

Podmiňování

Definice (zúžení náhodné veličiny na množinu)

X je n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $B \in \mathcal{F}$, t.ž. $P(B) > 0$.

$$F_{X|B}(x) := P(X \leq x \mid B)$$

K tomu přísluší hustotní funkce $f_{X|B}$.

- pokud $B = \{X \in S\}$, tak

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \in S)} & \text{pokud } x \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta o rozkladu hustoty

Věta (věta o rozkladu hustoty)

Nechť X je spojitá n.v., nechť $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω. Pak

$$F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x) \quad \textit{a}$$

$$f_X(x) = \sum_i P(B_i) f_{X|B_i}(x).$$

Důkaz: věta o úplné pravděpodobnosti. (Spec. případ byl na cvičení – dva algoritmy.)

Marginální hustota

Věta

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Podmíněná hustota

Definice

Pro spojité n.v. X, Y definujeme podmíněnou hustotu (conditional pdf) předpisem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

pokud je $f_Y(y) > 0$, jinak ji nedefinujeme.

- připomeňme, že $f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$
- pro fixované y je $f_{X|Y}(x|y)$ hustota

Podmíněná, sdružená a marginální hustota

Věta

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

Součet spojitých n.v.

Věta

Nechť spojité X, Y jsou n.n.v. Pak $Z = X + Y$ je také spojitá n.v. a její hustotu dostaneme jako konvoluci funkcí f_X, f_Y, neboli

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

Ukázka konvoluce

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $\mathbb{E}\big(X \mid B\big) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$
- $\mathbb{E}\big(g(X)\big|B\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$

Věta (o úplné střední hodnotě)

Nechť X je spojitá n.v. Pokud B_1, B_2, … je rozklad, tak

$$\mathbb{E}\big(X\big) = \sum_i P(B_i)\mathbb{E}\big(X \mid B_i\big).$$

Důkaz: pomocí rozkladu hustoty.

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ je hustota n.v. X, pokud $Y = y$
- $\mathbb{E}\big(X \mid Y = y\big) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$ je střední hodnota této veličiny
- $\mathbb{E}\big(g(X)\big|Y = y\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$
- Analogie věty o úplné střední hodnotě:

$$\mathbb{E}\big(X\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\big(X \mid Y = y\big) f_Y(y)dy$$

- $\mathbb{E}\big(X\big) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\big(X \mid Y\big))$

Přehled

Kovariance

Definice

Pro n.v. X, Y definujeme jejich kovarianci (covariance) předpisem

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big).$$

Věta

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\big(XY\big) - \mathbb{E}\big(X\big)\mathbb{E}\big(Y\big)$$

- $var(X) = cov(X,X)$
- $cov(X, aY + bZ + c) = a\,cov(X,Y) + b\,cov(X,Z)$
- $cov(X,Y) = 0$ pokud X,Y jsou nezávislé
- ale nejen tehdy

Korelace

Definice

Korelace náhodných veličin X, Y je definována předpisem

$$\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\,var(Y)}}.$$

- je to přenormovaná kovariance
- $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$ (cvič.)
- Korelace neznamená příčinnou souvislost! (Např., korelace je symetrická, kauzalita nikoli!)
- Naopak, nekorelace neznamená nezávislost. (Př: X libovolná, $Y = +X$ nebo $Y = -X$, obojí se stejnou pravděpodobností.)

Rozptyl součtu

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Pak*

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j).$$

Spec. jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ *nezávislé, pak*

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$

Přehled

Spojité náhodné vektory

Kovariance a korelace

Nerovnosti

Limitní věty – aproximace

Cauchyho nerovnost

Věta

Nechť X, Y mají konečnou střední hodnotu a rozptyl. Pak

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

- Důsledek pro korelaci: $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$

Jensenova nerovnost

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu a nechť g je konvexní reálná funkce. Pak

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) \geq g(\mathbb{E}\big(X\big)).$$

(Pro konkávní platí opačná nerovnost.)

Markovova nerovnost

Věta

Nechť náhodná veličina X *splňuje* $X \geq 0$. *Pak*

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Čebyševova (Chebyshev) nerovnost

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak

$$P(|X - \mu| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Chernoffova (Černovova) nerovnost

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$*, kde* X_i *jsou n.n.v. nabývající hodnot* ± 1 *s pravděpodobností* $1/2$*. Pak pro* $t > 0$ *platí*

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{-t^2/2\sigma^2},$$

kde $\sigma = \sigma_X = \sqrt{n}$*.*

Bez dk.

Přehled

Silný zákon velkých čísel (strong law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ *jsou stejně rozdělené n.n.v. se stř. hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *tzv. výběrový průměr (sample mean). Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mu \quad \textit{skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1).}$$

Říkáme, že posloupnost S_n *konverguje k* μ *skoro jistě (almost surely).*

Monte Carlo integration

Jak spočítat $\int_{x \in A} g(x)dx$?
Speciálně:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

... obsah kruhu

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ *jsou stejně rozdělené n.n.v. se stř. hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$*. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Říkáme, že posloupnost S_n *konverguje k* μ *v pravděpodobnosti (in probability).*

Centrální Limitní věta

Centrální Limitní věta

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ *jsou stejně rozdělené n.n.v. se střední hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $Y_n = ((X_1 + \cdots + X_n) - n\mu)/(\sqrt{n} \cdot \sigma)$*.*
Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$*. Neboli, pokud* F_n *je distribuční funkce* Y_n*, tak*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že posloupnost Y_n *konverguje k* $N(0,1)$ *v distribuci (in distribution).*

Momentová vytvořující funkce

Definice

Pro náhodnou veličinu X označíme

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right).$$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce (moment generating function).

- $M_{Bern(p)}(t) = p \cdot e^t + (1-p)$.
- $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(X^n\right) \frac{t^n}{n!}$.
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$, jsou-li X, Y n.n.v.
- $M_{Bin(n,p)} = (pe^t + 1 - p)^n$
- $M_{N(0,1)} = e^{t^2/2}$
- $M_{Exp(\lambda)} = \frac{1}{1-t/\lambda}$
- Pokud $M_X(t) = M_Y(t)$ na intervalu $(-a, a)$ pro nějaké $a > 0$, tak je $X = Y$ s.j.