MATICOVÁ EXPONENCIÁLA

- soustava rovnic s konstantními koeficienty

$\boxed{\vec{x}' = A\vec{x}}$ … vektorový/maticový zápis

$x' = ax$, $a \in \mathbb{R}$ … řešení $x(t) = e^{at}x_0$
$x(0) = x_0$

řešení systému lze také zapsat ve tvaru $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$

Co je to e^{tA}?

Víme: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Tedy definujme: pro matici A $\quad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

a $\boxed{e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}$ $\qquad A^0 = I \Rightarrow e^{tA}\big|_{t=0} = I$

$$\left(e^{tA}\right)' = \left(\sum \frac{(tA)^n}{n!}\right)' \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(tA)^n}{n!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1} A^n}{n!} = A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$$

$(e^{tA}x_0)' = A \cdot e^{tA}x_0$ …. $x(t) = e^{tA}x_0$ je řešením soustavy

Jak spočítat e^{tA}?

1) Pokud A je diagonální $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & & & 0 \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^2 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{k!} t^k a_1^k & & & 0 \\ & \sum \frac{1}{k!} t^k a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{ta_1} & & & 0 \\ & e^{ta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{ta_n} \end{pmatrix}$$

2) <u>Když A není diagonální</u> ... převedeme do Jordanova kanonického tvaru:

$$A = VJV^{-1}, \quad \text{kde} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

V je tvořena vlastními vektory.

$$A^k = (VJV^{-1})(VJV^{-1}) \ldots (VJV^{-1}) = VJ^kV^{-1}$$

2a) <u>pokud J je diagonální</u>, tak jsme doma

$$e^{tA} = \sum \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum \frac{1}{k!} t^k VJ^kV^{-1} = V\Big(\underbrace{\sum \frac{1}{k!} t^k J^k}\Big) V^{-1}$$

umím spočítat pro J diagonální!

2b) <u>pokud J není diagonální</u>, pak je situace složitější, objeví se polynomy.

Př)

$$x' = 10x - 6y$$
$$y' = 18x - 11y$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$$ ... převeď do Jordanova tvaru

vl. čísla: $\det \begin{pmatrix} \lambda - 10 & 6 \\ -18 & \lambda + 11 \end{pmatrix} = (\lambda - 10)(\lambda + 11) + 6 \cdot 18$

$$= \lambda^2 + \lambda - 110 + 108 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2$

vl. vektory:

$\lambda=1$ $\qquad \begin{pmatrix} \lambda-10 & 6 \\ -18 & \lambda+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -18 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = v_1$

$\lambda=-2$ $\qquad \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -18 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = VJV^{-1}$$

$$e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-2t} \\ 3e^t & 2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^t-3e^{-2t} & -2e^t+2e^{-2t} \\ 6e^t-6e^{-2t} & -3e^t+4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Řešení s p.p. $\begin{matrix} x(0)=a \\ y(0)=b \end{matrix}$ je $\begin{pmatrix} 4e^t-3e^{-2t} & -2e^t+2e^{-2t} \\ 6e^t-6e^{-2t} & -3e^t+4e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

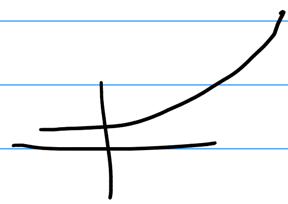
- přechod k podobné matici odpovídá substituci a přechodu k jiným souřadnicím.

$x' = Ax \qquad\qquad A = VJV^{-1}$

$x' = VJV^{-1}x \qquad$ subst. $y := V^{-1}x$

$$y' = (V^{-1}x)' = V^{-1}x' = \cancel{V^{-1}}\cancel{V}JV^{-1}x = Jy$$

$$y' = Jy$$



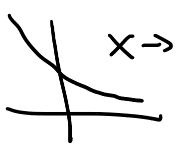
- J diagonální

$x_1' = \lambda_1 x_1 \quad \dots \quad x_1 = e^{\lambda_1 t}c_1 \qquad \lambda_j > 0 \quad x \to \infty$ pro $t \to \infty$

$x_2' = \lambda_2 x_2 \qquad\qquad \vdots$

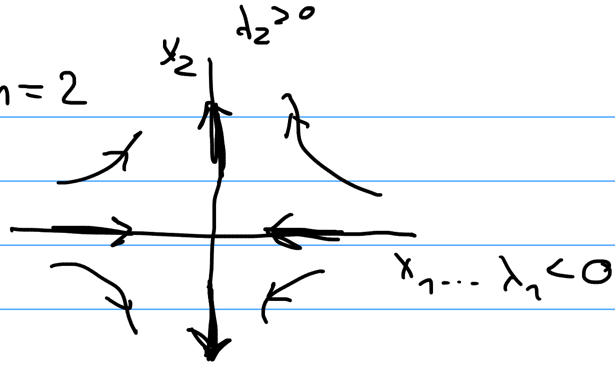
$\vdots$

$x_n' = \lambda_n x_n \qquad x_n = e^{\lambda_n t}c_n \qquad \lambda_j < 0$



$x \to 0$ pro $t \to +\infty$

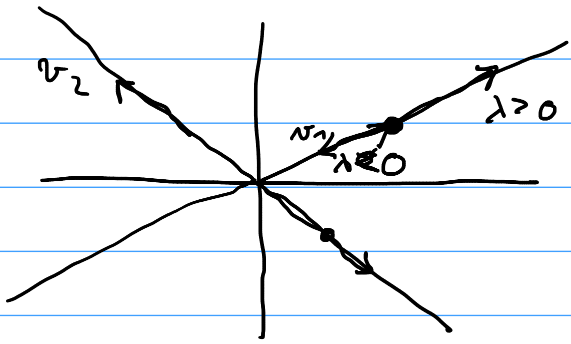
$n = 2$



- Pokud A není diagonální

  2×2

  vl. vektor v .... $Av = \lambda \cdot v$



$$\vec{x}' = A\underset{\overset{\|}{v_1}}{\vec{x}} = \lambda v_1 = \lambda x$$

vlastní vektory .... invariantními podprostory

⇝ rozklad na stabilní a nestabilní (a centrální podprostor)

$$\mathbb{R}^n = X_- \oplus X_0 \oplus X_+$$

$X_- = \mathrm{lin}\{v$: vlastní vektor & λ s $\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$
<u>stabilní podprostor</u>

$X_+ = \mathrm{lin}\{v$: $\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$
<u>nestabilní podprostor</u>

$X_0 = \mathrm{lin}\{v$: $\mathrm{Re}\,\lambda = 0\}$
<u>centrální podprostor</u>