ApDR - 8. PŘEDNÁŠKA

MINULÉ: TEORIE HER

2. HRÁČ

1. HRÁČ

	K	N	P
K	0	+1	-1
N	-1	0	+1
P	+1	-1	0

- strategie
- smíšená strategie
- prostor smíšených strategií Δ
- zobecněná výplatní funkce
- nejlepší odpověď $\beta_1(p)$
- nosič smíšené strategie $C(p)$
- Nashovo ekvilibrium

smíšená strategie (k,n,p) .... $k+n+p=1$ $\quad k,n,p\in[0,1]$

$$\pi_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j a_{ij} = \vec{x}\cdot A\cdot\vec{y}$$

$N\in\beta(P)$, $K\in\beta(N)$

Nashovo ekvilibrium $(p,q)\in\Delta_1\times\Delta_2$ ...

... $p\in\beta_1(q)$ & $q\in\beta_2(p)$

V případě KNP je NE jediné $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$

$p\in\beta_1(q) \Rightarrow e^i\in\beta(q)\ \forall i\in C(p)$ $\qquad \searrow C\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)=\{1,2,3\}$

ⓅⓇ Hra Hrdlička - jestřáb

H-H : vyčkávají, pak jedna z nich ustoupí

J-H : jestřáb zaútočí, hrdlička uteče

J-J : zaútočí navzájem, jeden vyhraje, druhý bude zraněný

na vítězství ... 6b
prohra ... 0b
zranění ... −10b
ztráta času ... −1b

$H-H : \frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 0 - 1 = 2$
$J-J : \frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot(-10) = -2$
$J-H :$ H dostane 0
J dostane 6

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{2. hráč}} \\ & & H & J \\ \hline \text{1. hráč} & H & 2 & 0 \\ & J & 6 & -2 \end{array}$$

$\leftarrow$ výplaty 1. hráče

symetrická $\beta_1 = \beta_2 = \beta$
$\pi_1 = \pi_2 = \pi$

Hledáme NE : $H \in \beta(J)$ & $J \in \beta(H)$
$[H, J]$ je NE , $[J, H]$ je NE

Ve smíšených strategiích :
soupeř : $(h, 1-h)$
já : $(x, 1-x)$ ... bude nejlepší odpověď na $(h, 1-h)$

Moje výplata $(x, 1-x)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 1-h \end{pmatrix} = 2xh + \cancel{0\cdot x(1-h)}$
$+ 6(1-x)\cdot h - 2(1-x)(1-h)$

$= x\big(2h - 6h + 2(1-h)\big) + 6h - 2(1-h)$
$= x(-6h + 2) + 8h - 2$

$h > \frac{1}{3}$ ... volím $x = 0$
$h < \frac{1}{3}$ ... $x = 1$
$h = \frac{1}{3}$ volím cokoli

z pohledu 2. hráče: $x > \frac{1}{3}$ ... volí $h = 0$
$x < \frac{1}{3}$ .... volí $h = 1$
$x = \frac{1}{3}$ ... volí cokoli

- $h > \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \Rightarrow h = 1$ $[H, J]$
- $h < \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \Rightarrow h = 0$ $[J, H]$
- $h = \frac{1}{3} \Rightarrow x$ .. lib ... ve skutečnosti jen $x = \frac{1}{3}$ ... $\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$

Je některé NE lepší než ta ostatní ?

III.2 Replikátorová rovnice

Uvažujme 1 populaci, která „bojuje" sama proti sobě.

Mějme stále A … matice hry

$C(x) = \{i, x_i > 0\}$ … nosič smíšené strategie

$\pi(x,y) = xAy$ výplatní funkce

$\beta(x) = \{y \in \Delta : \pi(y,x) = \sup_{z\in\Delta} \pi(z,x)\}$

DF: Nashovo ekvilibrium x, jestliže $x \in \beta(x)$, tj

$\pi(x,x) \geq \pi(y,x) \quad \forall y \in \Delta$

„Populace x si vede (neostře) lépe než každá jiná v souboji s x."

Pz: 1. x je NE $\Rightarrow$ $\pi(e^i, x) \in \beta(x) \quad \forall i \in C(x)$

2. Ex. aspoň jedno NE pro ∀ hru.

3. Existují různá vylepšení pojmu NE, jedno z nich je následující:

DF Řekneme, že $x \in \Delta$ je evolučně stabilní strategie (ESS), jestliže $\forall y \in \Delta, y \neq x \ \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$\pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y).$$

Tj „stabilita vůči mutacím".

LEMMA: x je ESS, právě když je NE a navíc $\forall y \in \beta(x), y \neq x$ platí $\pi(y,y) < \pi(x,y)$.

dk:
$$\pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = \pi(x, (1-\varepsilon)x) + \pi(x, \varepsilon y)$$
$$= (1-\varepsilon)\pi(x,x) + \varepsilon\pi(x,y)$$
$$\pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = (1-\varepsilon)\pi(y,x) + \varepsilon\pi(y,y)$$

$$\text{ESS} \iff (1-\varepsilon)\pi(x,x) + \varepsilon\pi(x,y) \overset{(*)}{>} (1-\varepsilon)\pi(y,x) + \varepsilon\pi(y,y)$$
$\forall \varepsilon$ dost malá > 0.

„$\Leftarrow$" x je NE $\Rightarrow$ $\pi(x,x) \geq \pi(y,x)$

tj. buď $\pi(x,x) > \pi(y,x)$ $\Rightarrow$ $(*)$ platí pro malá ε

nebo $\pi(x,x) = \pi(y,x)$, pak $(*)$ plyne z $\pi(x,y) > \pi(y,y)$.

„$\Rightarrow$" z $(*)$ $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ $1 \cdot \pi(x,x) \geq 1 \cdot \pi(y,x)$
$\Rightarrow$ x je NE

a navíc, kdyby $y \in \beta(x)$ … $\pi(x,x) = \pi(y,x)$

aby platila $(*)$, musí nutně být $\pi(x,y) > \pi(y,y)$ $\square$

x je ESS, pokud platí: Buď si x vede ostře lépe než y v souboji s x, nebo si vedou stejně, ale x si vede lépe než y v souboji s y.

PZ: ESS $\Rightarrow$ NE, ale naopak to neplatí.

(Př) Hrdlička-jestřáb … v situaci jedné populace máme jen jedno NE: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Je to ESS?

Víme, že $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \beta\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) \Rightarrow y \in \beta\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ $\forall y \in \Delta$

Potřebujeme ukázat
$$\pi(y,y) < \pi\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), y\right).$$

$$\pi(y,y) = yAy = y\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} y \quad ; \quad y = (h, 1-h)$$
$$= 2h^2 + \cancel{0 \cdot h(1-h)} + 6h(1-h) - 2(1-h)^2$$
$$= h^2(2-6-2) + h(6+4) - 2 = -6h^2 + 10h - 2$$

$$\pi\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), y\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 1-h \end{pmatrix} = 2 \cdot \tfrac{1}{3}h + \tfrac{2}{3} \cdot 6h - 2\tfrac{2}{3}(1-h)$$
$$= h\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{12}{3} + \tfrac{4}{3}\right) - \tfrac{4}{3} = 6h - \tfrac{4}{3}$$

$$-6h^2 + 10h - 2 \overset{?}{<} 6h - \frac{4}{3}$$

$$-6h^2 + 4h - \frac{2}{3} < 0 \qquad h_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - \frac{48}{3}}}{-12} = \frac{1}{3}$$

dvojnás. kořen

platí ostrá nerovnost $\forall h \neq \frac{1}{3}$.

ANO $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ je ESS.

Zpět k diferenciálním rovnicím. Chceme popsat vývoj populace v čase… zaměříme se na procentuální zastoupení jednotlivých variant genu.

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$$

$$p_i'(t) = \alpha_i p_i(t)$$

← odpovídá tomu, jak dobře si vede i-tá varianta

<u>Chceme</u>: • $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \ \forall t \Rightarrow \sum p_i' = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(t) = 0$

• $\operatorname{sgn} \alpha_i = \operatorname{sgn}\left(\pi(e^i, p) - \pi(p, p)\right)$

Nejjednodušší volba $\alpha_i = \pi(e^i, p) - \pi(p, p)$
$= e_i A p - p A p$

$$\boxed{(RD) \quad p_i'(t) = \alpha_i p_i(t), \ \text{kde} \ \alpha_i = e_i A p - p A p}$$

replikátorová dynamika

Toto α jistě splňuje 2. předpoklad

Ukážeme, že splňuje i 1. předpoklad:

$$\sum \alpha_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i A p - p A p) \cdot p_i = \underbrace{\left(\sum p_i e^i\right)}_{=p} A p - p A p \underbrace{\sum p_i}_{=1}$$

$$= p A p - p A p = 0 \ \checkmark$$

VĚTA: Pro každou počáteční podmínku z Δ existuje právě jedno řešení (RD) definované na celém $\mathbb{R}$. Toto řešení x navíc splňuje $x(t) \in \Delta \ \forall t \in \mathbb{R}$. Navíc $C(x(t))$ je konstantní podél řešení (speciálně vnitřek, stěny, vrcholy, ... jsou invariantní množiny)

dk: Existence a jednoznačnost (lokální... na malém intervalu) plyne z teorie ODR. ... na $(-\delta, \delta)$

$$x(0) \in \Delta \iff \sum x_i(0) = 1$$

a víme, že $\left(\sum x_i(t)\right)' = \sum x_i'(t) = 0$

$$\implies \sum x_i(t) = 1 \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Zároveň

$$x_i(t) = e^{\int_0^s \alpha_i(s)\, ds} x_i(0) \qquad (*)$$

~~def~~. Mám řešení x, definuje $\alpha_i(t) = e_i A x(t) - x(t) A x(t)$

$\implies (**)$

Ale exponenciála > 0

$\implies x_i(t)$ má stejné znaménko jako $x_i(0)$

$\implies x_i(0) \geq 0 \ \forall i \implies x_i(t) \geq 0 \ \forall i \ \forall t$

$\sum x_i = 1 \implies x_i(t) \leq 1 \ \forall t$

$\implies x(t) \in \Delta \ \forall t$

a také $C(x(t))$ je konstantní

Z věty o opuštění kompaktu (Δ) plyne, že řešení bude definované $\forall t \in \mathbb{R}$. □