

# Algebrou proti koronaviru VII

## Faktorokruhy a kořenová/rozkladová nadtělesa

1. Ověřte, že je  $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 + 1)$  těleso a spočítejte

- (a)  $(\alpha)^5$
- (b)  $\alpha^{-1}$
- (c)  $(\alpha + 1)^{-1}$
- (d)  $2\alpha \cdot (2\alpha + 1)$
- (e)  $\alpha^{-1} \cdot (\alpha + 2)$

2. V okruhu  $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 2)$  najděte prvek, který nemá inverz.

3. Buď  $T$  těleso a  $a \in T$ . Dokažte, že je těleso  $T[\alpha]/(\alpha - a)$  izomorfní tělesu  $T$ .

4. Dokažte, že je těleso  $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3 - 2)$  izomorfní tělesu  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ .

5. Napište všechna kořenová a rozkladová nadtělesa polynomů

- (a)  $x^2 - 2$
- (b)  $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
- (c)  $x^n - 1$

nad tělesem  $\mathbb{Q}$  obsažená v  $\mathbb{C}$ .

6. Popište rozkladové nadtěleso polynomu  $x^2 + x + 1$  nad  $\mathbb{Z}_2$  a rozložte v něm daný polynom na lineární členy.

## Další počítání

7. V tělese  $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^3 + \alpha + 1)$  spočtete

- (a)  $(3\alpha^2 + 4\alpha + 1) + (2\alpha^2 + 4)$
- (b)  $(3\alpha^2 + 4\alpha + 1) \cdot (2\alpha^2 + 4)$
- (c)  $(2\alpha^2 + 4)^{-1}$
- (d) řešení lineární rovnice  $\alpha \cdot x + (\alpha + 1) = \alpha^2$

8. Napište tabulky operací čtyřprvkového tělesa.

9. Buď  $T = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4 + \alpha^3 + 1)$ . Najděte ireducibilní rozklad polynomu  $x^3 - 1$  v  $T[x]$ .

10.\* Ověřte, že je  $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^3 + \alpha + 1)$  těleso a najděte v něm všechny kořeny polynomu  $x^7 + 1$ .

11.\* Dokažte, že v tělese  $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 + 1)$  najdete prvek  $u$  s vlastností, že každý nenulový prvek tělesa  $T$  lze napsat jako mocnina  $u$ . Napište ireducibilní rozklad polynomu  $x^8 - 1$  v  $T[x]$ .

12.\* Dokažte, že existuje izomorfismus mezi okruhy  $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^4 - 1)$  a  $\mathbb{Z}_5^4$ .

13.\* Je následující polynom symetrický?

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

14.\* Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

- (a)  $3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2$ ,
- (b)  $x^3(y + z) + y^3(x + z) + z^3(x + y)$ .