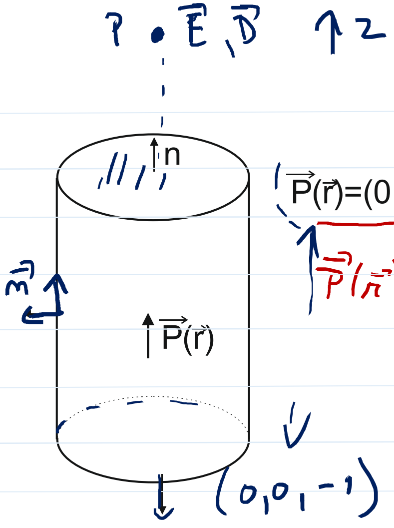
Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce



$\vec P(\vec r) = (0,0,P_0)$ konst $\Rightarrow \varrho_v = 0$

$\vec P(\vec r) = 0$ vně válce

$\vec P(\vec r)$ z DÚ

DÚ

$\vec E$ pro $0 < z < h$ ve válci

$\vec E$ pro $z > h$ nad válcem

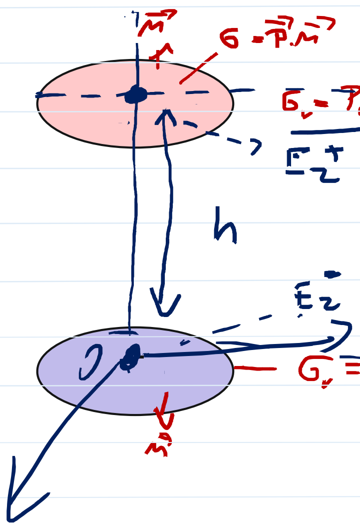
totéž pro $\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P$

Ověřte chování norm. složek $\vec E$ a $\vec D$ na horní podstavě válce

lze nahradit objemovými náboji $\varrho_v = -\operatorname{div} \vec P = 0$

a plošnými σ $\vec P \cdot \vec n$; na plášti válce $\vec P \perp \vec m \Rightarrow \sigma = 0$

$\sigma = \vec P \cdot \vec m$ na podstavách $\sigma = \pm P_0$



Pole pro obě podstavy

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = \frac{-P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|}$$

$$+ \frac{+P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{(z-h)}{|z-h|}$$

$(0,0,E_z(z))$ Pole nabitého kruhu v počátku

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z>0$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z<0$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\cdot\frac{z}{|z|} \quad \forall z$$

DÚ

Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce

Přesněji: za využití výsledku získaného na cvičení (viz dole)

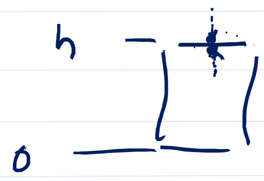
vyjádřete E_z pro $0 < z < h$ uvnitř válce

pro intenz. na ose E_z pro $z > h$ vně válce

vyjádřete indukci $\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\to D_z}$ na ose také uvnitř a nad válcem

a ověřte chování normálových složek $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na horní podstavě válce.

tj E_z pr $z \to h$ zdola / shora



$$E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z$ — $P_z = P_0$ ve válci, $P_z = 0$ mimo

$z > h > 0$

$|z-h| = z-h$

$|z| = z$

$$E_z = +\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{z-h}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right) - \left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right] = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right]$$

$z \to h$ shora $\quad E_z\big|_{z=h} = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$

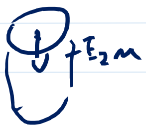
$\sigma_p = P_0$

$0 < z < h$

$|z-h| = h-z$

$|z| = z$

$$E_z = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)(-1) - \left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right] = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}} - 2\right]$$



$z \to h$ zdola $\quad E_z\big|_{z=h} = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2\right) \Rightarrow$ nespojitost norm. složky E_z na horní podstavě

$E_{1n} - E_{2n} = +\frac{P_0}{\varepsilon_0}$ ✓

Indukce:

$z > h > 0$

$$D_z = \frac{P_0}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right] \Rightarrow z \to h \text{ shora } \quad D_z\big|_{z=h} = \frac{P_0}{2}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

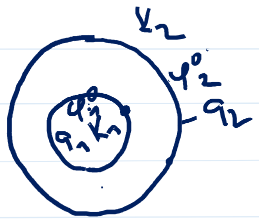
$0 < z < h$

$$D_z = \frac{P_0}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right] - P_0 + P_0 \Rightarrow z \to h \text{ zdola } \quad D_z\big|_{z=h} = \frac{P_0}{2}\frac{h}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Totéž platí i pro spodní podstavu

Norm. složky indukce jsou spojité na horní podstavě

(A)1.2.5. Kulový vodič K1 o poloměru $R1$ je obklopen soustřednou vodivou kulovou slupkou K2 o poloměru $R2$. Pro tuto soustavu vypočítejte kapacitní a influenční koeficienty a přesvědčte se, že platí Cik = Cki.



	K_1	K_2
	q_1	q_2
	φ_1^0	φ_2^0

$$q_1 = C_{11}\varphi_1^0 + C_{12}\varphi_2^0$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1^0 + C_{22}\varphi_2^0$$

$$\varphi_1^0(q_1, q_2) = \varphi_1^0 \quad (1)$$
$$\varphi_2^0(q_1, q_2) = \varphi_2^0 \quad (2)$$

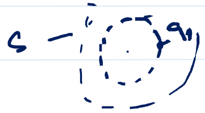
$(1)-(2) \Rightarrow q_1$

$(1)\frac{1}{R_2} - (2)\frac{1}{R_1} \rightarrow q_2$

$$q_1 = q_1(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$$
$$q_2 = q_2(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$$

Koule K_1 budí potenciál!

(q_1) $$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \quad r > R_1$$



$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} \quad r \leq R_1$$

$$\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2}\right) =$$

$$q_1 = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\cdot(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)$$

Slupka K_2 $\quad \varphi_2(r)$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} \quad r > R_2$$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \quad r \leq R_2$$

$4\pi r^2 E = 0$

$\Rightarrow E = 0$

$\Rightarrow \varphi$ konst

$$q_2 = 4\pi\varepsilon_0\left[\varphi_1^0\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} + \varphi_2^0\frac{R_2^2}{R_2 - R_1}\right]$$

celkové pole $\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r)$

Potenc. K_1 $\quad \varphi_1^0 = \varphi(r)\big|_{r=R_1} \Rightarrow \varphi_1^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$ (1)

potenc. K_2 $\quad \varphi_2^0 = \varphi(r)\big|_{r=R_2} \quad \varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2}\right)$ (2)

$$\rightarrow \frac{\varphi_1^0}{R_2} - \frac{\varphi_2^0}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2^2} - \frac{q_2}{R_1 R_2}\right)$$

$$-C_{12} = C_{11} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \cdot 4\pi\varepsilon_0$$

$$C_{11} = -C_{12} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = -C_{21}$$

$$C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2 - R_1}$$

$$C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = C_{12} = -C_{11}$$

Kapacita kul. kondenzátoru

$$q_1 = -q_2$$

$$C = \frac{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}} \rightarrow \underline{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

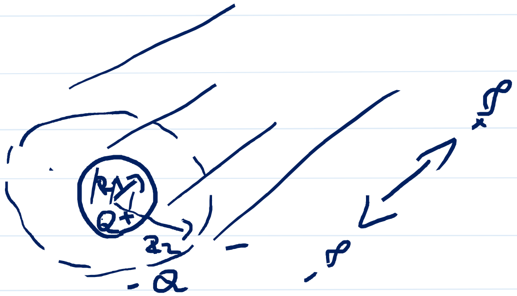
kapacitu koaxiálního kabelu na 1 m délky

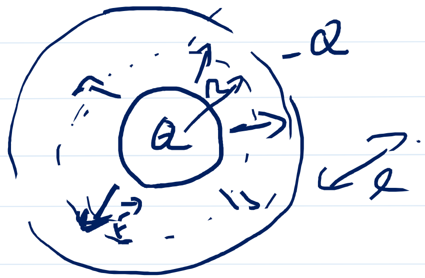
Odvoďte vztah pro:
(e) kapacitu válcového kondenzátoru na metr délky
(f) kapacitu dvoulinky

(viz také kapitola 1.4.7. Příklady použití (str. 107).

$\frac{Q^{\ell}}{\ell} = \tau$ náboj na délce ℓ, hust. lineární

G.P.
G.Z.





Tok

$E 2\pi r \ell = \frac{\tau \ell}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$C = \frac{Q}{U}$

$U = \varphi^+ - \varphi^- = \int_+^- E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} =$

$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q^{\ell}}{\ell} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}$

C pro délku ℓ

$C^{\ell} = \frac{Q^{\ell}}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln R_2/R_1}$

na 1 metr délky $C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$