Podmíněná pravděpodobnost

Pokud B je jev splňující $P(B) > 0$, pak *podmíněnou pravděpodobnost* jevu A za podmínky jevu B definujeme jako

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Úloha 8.1 (dostihy)

Favority dostihu jsou koně Amarant a Baklažán. Odborníci tipují, že Amarant zvítězí s pravděpodobností 0,5 a Baklažán s pravděpodobností 0,3.

Amarant ztratil na startu tolik, že je již jisté, že nezvítězí.

Jaká je nyní pravděpodobnost, že zvítězí Baklažán?

Nezávislé jevy

Pro nezávislé jevy A a B je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, a proto $P(A \mid B) = P(A)$, pokud $P(B) > 0$.

Podobně dostaneme, že $P(B \mid A) = P(B)$, pokud $P(A) > 0$.

Obdobně z úvahy typu
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$
dostaneme $P(A \mid B^c) = P(A)$ a $P(B \mid A^c) = P(B)$ pro $P(A), P(B) < 1$.

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

1. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$
2. $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$, pokud $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
4. $P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A) = P(A \cap B)$
5. $P(A \mid B) > P(A) \iff P(B \mid A) > P(B)$

Úloha 8.2 (o zapomenutém deštníku)

Roztržitý profesor matematiky zapomíná v obchodě deštník s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, tedy za podmínky, že tam s ním vůbec dorazí.

Vyšel z domova s deštníkem, navštívil tři obchody a cestou domů zjistil, že deštník už nemá.

Jaká je pravděpodobnost, že zapomněl deštník právě v i-tém obchodě ($i = 1, 2, 3$)?

Hlasovací otázka 8

Hodíme modrou a červenou kostkou. Platí:

A) $P(M = 6 \mid \text{součet je lichý}) > P(\text{součet je lichý} \mid M = 6)$,

B) $P(M = 6 \mid \text{součet je lichý}) < P(\text{součet je lichý} \mid M = 6)$,

C) $P(M = 6 \mid \text{součet je lichý}) = P(\text{součet je lichý} \mid M = 6)$,

D) jevy $[M = 6]$ a $[\text{součet je lichý}]$ jsou nezávislé.

Úloha 8.3 (Bertrandův zásuvkový paradox)

Skříňka má tři zásuvky, v každé z nich jsou dvě mince, a to tak, že v jedné zásuvce jsou dvě zlaté, v další zlatá a stříbrná a ve zbývající zásuvce jsou dvě stříbrné mince.

Náhodně otevřeme jednu zásuvku, náhodně z ní vybereme minci: je stříbrná.

Jaká je nyní pravděpodobnost, že v otevřené zásuvce zůstala zlatá mince?

Opatrnosti je třeba!

U viníků dopravních nehod bylo v 10 % případů zjištěno požití alkoholických nápojů. Znamená to, že střízliví řidiči jsou více nebezpeční?

Když N bude značit jev, že došlo k nehodě, a O jev, že řidič pil alkohol, pak zadání říká $P(O \mid N) = 0{,}1$, neboli $P(O^c \mid N) = 0{,}9$.

To ale nic nevypovídá o $P(N \mid O)$ nebo $P(N \mid O^c)$. K tomu bychom potřebovali mít nějakou dodatečnou znalost.

Předpokládejme, že $P(O) = 0{,}005$, potom dostáváme
$P(N \mid O) = P(O \mid N)P(N)/P(O) = 20P(N)$,
$P(N \mid O^c) = P(O^c \mid N)P(N)/P(O^c) = \frac{0{,}9}{0{,}995}P(N) \doteq 0{,}905P(N)$,
tedy požití alkoholu je daleko nebezpečnější.

Úloha 8.4 (tři vězni)

Ve vězení očekávají tři lotři Alcapone, Babinský a Cimrman popravu. Popraveni budou však pouze dva, tuto dvojici už určil los, verdikt každému z nich však bude sdělen až za úsvitu.

Alcapone se oklikou snaží posoudit své šance tak, že informovaného dozorce žádá: Jmenuj jednoho z mých spoluvězňů, který bude popraven!

Dozorce je pravdomluvný, má-li více možností odpovědět, volí jméno náhodně. Tento dozorce odpoví – Babinský.

Před rozhovorem věděl Alcapone, že bude popraven s pravděpodobností $2/3$. Jaká je pravděpodobnost nyní, po rozhovoru s dozorcem?

Úloha 8.5 (o výstředním žalářníkovi)

V žaláři je vězeň odsouzený k smrti. Výstřední žalářník však dá vězni šanci.

Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček. Pak mu dá dvě prázdné urny. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku. Bude-li bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán.

Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?