8. cvičení z PSt — 20.4.2021

- $Exp(\lambda)$ má hustotu $\lambda e^{-\lambda x}$, střední hodnotu $1/\lambda$ a rozptyl $1/\lambda^2$.
- $N(0,1)$ má hustotu $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, střední hodnotu 0 a rozptyl 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Samplování

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

(a) Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $var(S_n)$.

(b) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.

(c) Použijte vhodné X_i, aby μ obsahovalo číslo π. Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu π. (Jak velké n myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)

2. Vzpomeňte si na větu z přednášky. Nechť $U \sim U(0,1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu

(a) s rozdělením $U(a,b)$?

(b) s Cauchyho rozdělením? (připomeňte si, že $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$)

(c) s rozdělením $N(0,1)$?

Exponenciální rozdělení

3. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

4. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

5. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

Normální rozdělení

6. Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte
(a) $P(|Z| \leq 1)$
(b) $P(|Z| \leq 2)$
(c) $P(|Z| \leq 3)$
(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

7. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Spojité vektory

Připomeňte si:

- dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta)

$$\int_X \int_Y f(x,y) dy dx = \int_Y \int_X f(x,y) dx dy.$$

Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$
- nezávislost X, Y $\iff$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$ $\iff$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

8. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

9. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

10. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

K procvičení

11. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?

(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

12. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

(a) Jaké je λ?

(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?

(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?

(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

13. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?

(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, . . . (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

14. $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$.

(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.

(b) Spočtěte $P(X \le 1)$, $P(X > 2)$.

(c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

15. Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

16. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

17. Nechť $X \sim N(0, 1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $var(Y)$.

18. Najděte analogii „pravidla 3σ“, neboli spočtěte $P(|X - \mathbb{E}(X)| < c \cdot \sigma_X)$ $(c = 1, 2, 3)$, pokud

(a) X má uniformní rozdělení,

(b) $X \sim Exp(1)$,

(c) $X \sim Exp(2)$.

Nápovědy

1: použijte větu o linearitě střední hodnoty a o rozptylu součtu n.n.v.

2: Pro normální rozdělení nehledejte explicitní vzorec, jen formulku pomocí Φ.

3, 4: použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.

5: Totéž, plus si rozmyslete, jaká je distribuční funkce M pomocí distribučních fcí $X_1, \ldots, X_n$.

6,7: Připomeňte se, co znamená distribuční funkce.

8: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

9d: Nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi. Pokud zvlédnete to, zbytek je lehký.

10: (a) hustota je konstatní v tom polokruhu, nulová jinde. (b) Integrace podle x. (c) Máte dvě možná pořadí integrování. Jedno vede na stejný výpočet jako v části (b).