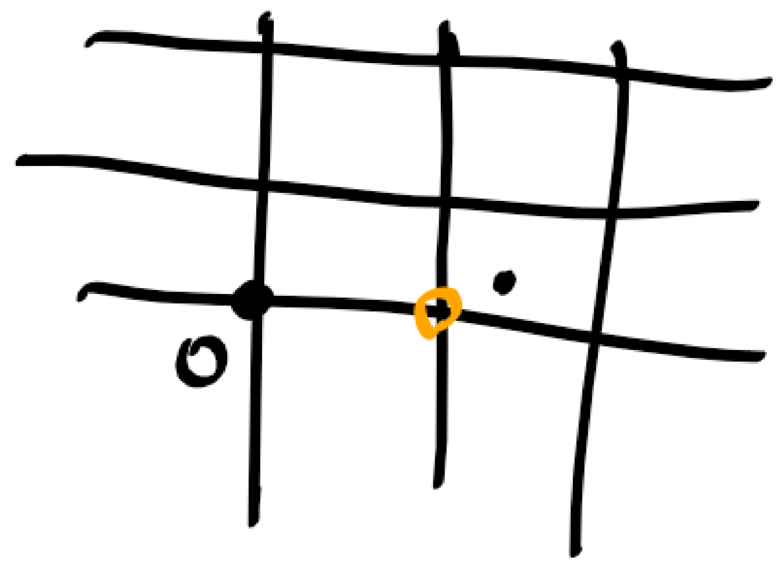
3. Nalezněte v $\mathbb{Z}[i]$ NSD čísel a) $3+i, 4+2i$; b) $3+6i, 12-3i$; c) $5+3i, 13+18i$.

$4+2i$	1	0	
$3+i$	0	1	-1
$1+i$	1	-1	
0			

$$\frac{4+2i}{3+i} = \frac{4+2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{12+2+6i-4i}{10} = \frac{14+2i}{10}$$

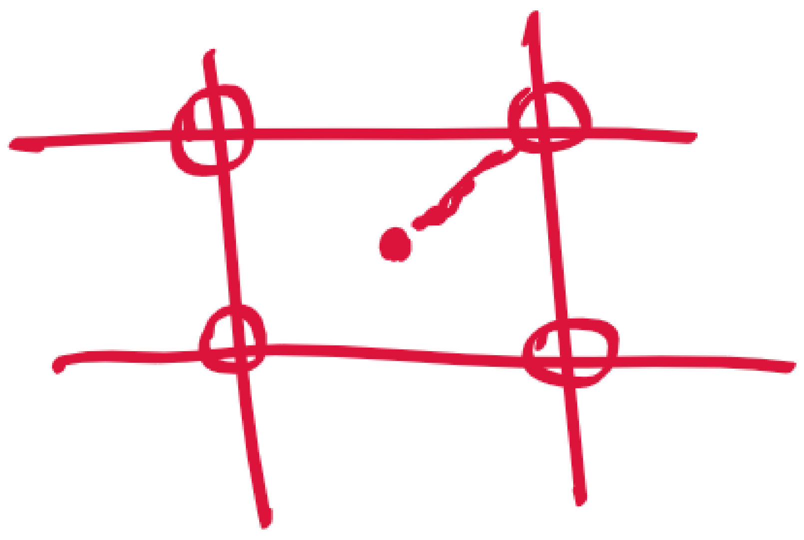
1



$$\frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{3+1-3i+i}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$$(4+2i) - 1\cdot(3+i) = 1+i$$

$$\Rightarrow \text{NSD}(4+2i,\, 3+i) = 1+i = (4+2i)\cdot 1 + (3+i)\cdot(-1)$$



4. Najděte $a \in \mathbb{N}$ tak, aby ideál $a\mathbb{Z}$ byl roven: a) $28\mathbb{Z} + 63\mathbb{Z}$;

$$a\mathbb{Z} = 28\mathbb{Z} + 63\mathbb{Z} = \{28k + 63l,\ k, l \in \mathbb{Z}\}$$

Bezout

$$a = \text{NSD}(28, 63) = \boxed{7 = 28m + 63n}$$

$$7\mathbb{Z} = 28\mathbb{Z} + 63\mathbb{Z}\ ?$$

„$\subseteq$": $7k = (28m + 63n)k = \underbrace{28km}_{\in 28\mathbb{Z}} + \underbrace{63kn}_{\in 63\mathbb{Z}}$

„$\supseteq$": $28k + 63l = 7\cdot(\underbrace{4k + 9l}_{\in \mathbb{Z}}) \in 7\mathbb{Z}$

7. Nechť $S = \mathbb{Z}[x]$. Uvažujme ideály $I = 2S + xS$ a $J = 3S + xS$. Ukažte, že množina $\{ab; a \in I, b \in J\}$ netvoří ideál v okruhu S. Dokažte také, že I, J nejsou hlavní ideály.

a) I není hlavní ideál: Sporem, ať je hlavní $\Rightarrow \exists a \in S$:

$$aS = 2S + xS = I$$

$$\{2f + xg : f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$$

$2, x \in I \Rightarrow 2, x \in aS$

$2 = a \cdot b \Rightarrow a | 2$

$x = a \cdot c \Rightarrow a | x$

$a = \pm 1, \cancel{\pm 2}$

$\Downarrow$

$aS = S = \mathbb{Z}[x]$

$$\mathbb{Z}[x] = \underbrace{2S + xS}_{\text{absolutní člen je sudý}}$$

$2 \cdot f + \underline{x \cdot g}, \quad f, g \in \mathbb{Z}[x]$

$1 \in \mathbb{Z}[x]$

SPOR

$A = \{ab : a \in I, b \in J\}$

• nás. skalárem ✓ $\quad c \cdot (ab) = (ca) \cdot b \in A$, $\quad ca \in I$, $b \in J$

• součet: ✗ $\quad a_1 b_1 + a_2 b_2 \overset{?}{\in} A$

6. Vysvětlete následující „rozpor“:

(a) V oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ platí $(-2)2 = (i\sqrt{3}+1)(i\sqrt{3}-1)$, a proto se nejedná o obor s jednoznačným rozkladem (tj. Gaussův obor).

(b) V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $\sqrt{2}\sqrt{2} = (-4+3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$, a přesto se jedná o obor s jednoznačným rozkladem.

a) $a^2 + 3b^2$

$a \parallel p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$

$a \parallel q_1^{l_1} \cdots q_m^{k_m}$

$m = n$

$-2 \nparallel (i\sqrt{3}+1)$

$2 \nparallel (i\sqrt{3}-1)$

$4 = \boxed{2} \cdot \boxed{2}$

$4 = \boxed{(-2)} \cdot \boxed{(-2)}$

$2 \parallel -2$

b) $\sqrt{2},\ -4+3\sqrt{2}$

• $\dfrac{-4+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{-4\sqrt{2}+6}{2} = -2\sqrt{2}+3$

• $\dfrac{\sqrt{2}}{-4+3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{-4-3\sqrt{2}}{-4-3\sqrt{2}} = \dfrac{-4\sqrt{2}-6}{16-18} =$

$= -2\sqrt{2} - 3$

$\Rightarrow \sqrt{2} \parallel (-4+3\sqrt{2})$