SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Př.

$$x' = 2x + y$$
$$y' = x - 2y \quad \rightsquigarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= y' + 2y \\ x' &= y'' + 2y' \end{aligned}\right\} \text{ dosadíme do 1. rovnice}$$

$$y'' + 2y' = 2(y' + 2y) + y$$

$$y'' - 5y = 0 \qquad \text{char. polynom } \lambda^2 - 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= a \cdot e^{\sqrt{5}t} + b e^{-\sqrt{5}t} \\ x(t) &= y' + 2y = a\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} - b\sqrt{5}e^{-\sqrt{5}t} + 2ae^{\sqrt{5}t} + 2be^{-\sqrt{5}t} \end{aligned}}$$

Př.

$$x' = 2x + y - z$$
$$y' = 7x + 4y - z \qquad \sim \text{ Gaussova eliminace}$$
$$z' = 13x + 7y - 3z$$

$$x' - 2x - y + z = 0$$
$$y' - 7x - 4y + z = 0$$
$$z' - 13x - 7y + 3z = 0$$

derivace reprezentujeme jako násobení λ

λ-matice

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda-4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda+3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I}. \\ -(\lambda+3)\mathrm{I}. \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda-5 & \lambda-3 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II}. \end{matrix} \sim$$

$$-13 - (\lambda+3)(\lambda-2)$$
$$-13 - \lambda^2 - \lambda + 6$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda-5 & \lambda-3 & 0 \\ -\lambda^2-2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +(\lambda-3)\mathrm{III}. \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2-2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda - 5 + (\lambda-3)(-\lambda^2-2) = -\lambda - 5 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda^2-2 & -1 & 0 \\ -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. řádek $\quad -x''' + 3x'' - 3x' + x = 0$

vyřešíme: charakteristický polynom $\quad -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1=0$

$$-(\lambda-1)^3 = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 1$$

$$\boxed{x(t) = a\cdot e^t + bte^t + ct^2e^t}$$

II. řádek : $\quad -x''-2x-y=0 \qquad y = -x''-2x$

$x' = ae^t + be^t + bte^t + 2cte^t + ct^2e^t$

$x'' = \underline{ae^t} + \underline{be^t} + \underline{be^t} + \underline{bte^t} + \underline{2ce^t} + \underline{2cte^t} + \underline{c2te^t} + ct^2e^t$

$= e^t\left((a+b+2c) + t(b+4c) + ct^2\right)$

$y(t) = -e^t\left(\qquad \right) - 2e^t(a+bt+ct^2)$

$$\boxed{y(t) = -e^t\left[(3a+b+2c) + t(3b+4c) + t^2\,3c\right]}$$

I. řádek : $\quad +x''-2x-y+z=0$

$$\boxed{z(t) = -x''+2x+y = \ldots\ldots}$$

POZOR:
- nelze násobit řádek polynomem (jen násobit číslem, nebo přičíst polynomiální násobek z jiného řádku)
- nelze dělit λ

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
\quad \longleftrightarrow \quad \vec{x}\,' = A\vec{x}
$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

λ-matice

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \dots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda I - A$$

při výpočtu vlastních čísel

λ je vlastní číslo matice A $\Longleftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$

Gaussova eliminace zachovává nenulovost/nulovost determinantu.

$$\boxed{\text{ZÁVĚR: čísla } \lambda\text{, která se vyskytují v exponenciálních funkcích řešení, jsou vlastní čísla matice soustavy (matice } A\text{).}}$$

Př

$$
\begin{aligned}
2y'' + 3z'' - 7y - 6z &= t + 1 \\
4y'' + 3z'' - 4y - 3z &= 2t
\end{aligned}
$$

– obs. vyšší derivace

– nenulová pravá strana

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t+1 \\ 4\lambda^2 - 4 & 3\lambda^2 - 3 & 2t \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\mathrm{I}. \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t+1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t-1 \end{array}\right) \sim$$

od 1. ř. odečtu $(\lambda^2 - 2)$-násobek II. ř.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -(2\lambda^2-1)(\lambda^2-1) & 0 & t+1-(t-1)''+2(t-1) \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
2\lambda^2 - 7 - (\lambda^2-2)(2\lambda^2+3) &= 2\lambda^2 - 7 - 2\lambda^4 + \lambda^2 + 6 \\
&= -2\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = -(2\lambda^2-1)(\lambda^2-1)
\end{aligned}
$$

I. řádek : $-2y'''' + 3y'' - y = 3t - 1$

1\. F.S. $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ... $(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $2\lambda^2 - 1 = 0$

$e^{t}, e^{-t}, e^{t/\sqrt{2}}, e^{-t/\sqrt{2}}$

2\. Partikulární řešení ve tvaru $y_p = at + b$

$-at - b = 3t - 1$ $a = -3$ $b = 1$

$y_p = -3t + 1$

$$\boxed{y(t) = ae^{t} + be^{-t} + ce^{t/\sqrt{2}} + de^{-t/\sqrt{2}} - 3t + 1}$$

z II. řádku

$z(t) = ?$

$2y'' + 3y + 3z = t - 1$

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{3}\left(-2y'' - 3y + t - 1\right)}$$

což už snadno dopočítáme.