ApDR - 7. PŘEDNÁŠKA

MINULÉ: EPIDEMICKÉ MODELY

$N(t)$ ... populace ... rozdělíme do tříd

$(x_1, \dots, x_n)$ .... nemocné třídy $\quad \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$(y_1, \dots, y_m)$ .... zdravé třídy $\quad \vec{y}(t) = \dots$

Např. SLIAR $\quad \vec{x} = (L, I, A) \quad \vec{y} = (S, R)$

$$\boxed{x_i'(t) = \Gamma_i(\vec{x}, \vec{y}) - \Phi_i(\vec{x}, \vec{y})} \qquad \boxed{y_j'(t) = g(\vec{x}, \vec{y})}$$

Γ_i ... nově nakažení, kteří se dostanou do i-té třídy nakažených z některé třídy zdravých

Φ_i ... výtok z i-té třídy do jiných tříd

linearizace na okolí stac. bodu $\quad F_{ij} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j}, \; V_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$

$$\boxed{x' = (F - V)x} \qquad \text{na okolí } 0$$

FV^{-1} je matice další generace

Reprodukční číslo R_0 je definováno jako
$\max\{|\lambda| : \lambda \text{ je vlastní číslo matice } FV^{-1}\}$

PLATÍ: $R_0 > 1 \iff \exists$ vl. číslo λ matice $F-V$, že $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$R_0 < 1 \iff \operatorname{Re}\lambda < 0 \;\; \forall \lambda$ vl. čísla matice $F-V$

(Př) Vypočtěme vl. číslo modelu SIR

$S' = -\beta S I \qquad$ I... jediná třída nemocných

$\rightarrow I' = \beta S I - \alpha I \qquad \Gamma = \beta S I \quad \Phi = \alpha I$

$R' = \alpha I \qquad S_0$ ... počáteční počet náchylných

$$F = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} = \beta S \Big|_{S=S_0} = \beta S_0 \qquad V = \frac{\partial \Phi}{\partial I} = \alpha \qquad V^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

Matice další generace : $FV^{-1} = \frac{\beta S_0}{\alpha}$

její největší vlastní číslo je $\frac{\beta S_0}{\alpha} =: R_0$.

Ⓟř Pro model SLIAR :

$$S' = -\beta S(I + \delta A)$$
$$L' = \beta S(I + \delta A) - \varkappa L$$
$$I' = p\varkappa L - \alpha I$$
$$A' = (1-p)\varkappa L - \eta A$$
$$R' = f\alpha I + \eta A$$

$\delta < 1$ (symptomatičtí jsou nakažlivější)

Třídy nakažených jsou L, I, A

$$\begin{pmatrix} L \\ I \\ A \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta S(I+\delta A) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Gamma} - \underbrace{\begin{pmatrix} \varkappa L \\ -p\varkappa L + \alpha I \\ -(1-p)\varkappa L + \eta A \end{pmatrix}}_{\Phi}$$

$$F\Big|_{S=S_0} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_0 & \beta S_0 \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 & 0 \\ -p\varkappa & \alpha & 0 \\ (p-1)\varkappa & 0 & \eta \end{pmatrix}$$

spočítejme V^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p\varkappa & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (p-1)\varkappa & 0 & \eta & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 1-p & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\varkappa} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{p}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{\eta} & 0 & \frac{1}{\eta} \end{array}\right) \qquad \underbrace{\hphantom{\begin{matrix} \frac{1}{\varkappa} & 0 & 0 \end{matrix}}}_{V^{-1}}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_0 p}{\varkappa} + \frac{\beta S_0 \delta (1-p)}{\eta}, & \frac{\beta S_0}{\alpha}, & \cdots \\ 0 & 0, & 0 \\ 0 & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Její vlastní čísla jsou $0, 0, \underbrace{\beta S_0 \left(\frac{p}{\varkappa} + (1-p) \frac{\delta}{\eta} \right)}_{\text{reprodukční číslo } R_0}$.

III. REPLIKÁTOROVÁ ROVNICE A TEORIE HER

III. Teorie her

Př KÁMEN-NŮŽKY-PAPÍR

		2. HRÁČ		
		K	N	P
1. HRÁČ	K	0	1	-1
	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

VÝPLATA 1. HRÁČE

		2. HRÁČ		
		K	N	P
1. HRÁČ	K	0	-1	1
	N	1	0	-1
	P	-1	1	0

VÝPLATA 2. HRÁČE

DF: Hrou (přesněji hrou dvou hráčů v normálním tvaru) rozumíme dvojici konečných množin S_1, S_2 (strategie 1. hráče, resp. 2. hráče) a dvojici výplatních funkcí $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (zisky 1. resp. 2. hráče při dané dvojici strategií)

Př Výše $S_1 = \{K, N, P\} = S_2$ $\pi_1(K,N) = 1$, $\pi_2(K,N) = -1$

Nadále pro jednoduchost nechť $S_1 = \{1, \dots, m\}$

$S_2 = \{1, \dots, n\}$

a $a_{ij} = \pi_1(i,j)$ $b_{ij} = \pi_2(i,j)$

$$A = (a_{ij})_{i=1..m}^{j=1..n} \qquad B = (b_{ij})$$

Takže hra je reprezentovaná dvojicí matic.

Pokud $m=n$ a $A^T = B$ .... symetrická hra
(oba hráči jsou stejní)

KNP ✓

Pokud $A = -B$ .... hra s konstantním součtem
$(A + B = 0)$ KNP ✓

Cíl: Hledáme nejlepší možnou strategii.
$\rightsquigarrow$ smíšené strategie

DF Prostorem smíšených strategií 1. resp. 2. hráče rozumíme

$$\Delta_1 = \{ p \in \mathbb{R}^m : p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \}$$

$$\Delta_2 = \{ q \in \mathbb{R}^n : q_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \}$$

Původní strategie nazýváme čisté strategie, odpovídají vektorům kanonické báze $(0,0,1,0,\dots,0)$.
$S_k \dots e^k$

Zobecněné výplatní funkce

$$\Pi_1, \Pi_2 : \Delta_1 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}$$ definované takto

$$\Pi_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} = p \cdot A \cdot q$$

$$\Pi_2(p,q) = p \cdot B \cdot q$$

Smíšené strategie lze chápat pravděpodobnostně nebo populačně.

Populace leguánka pestrého

1. typ ... má velké množství samic, velké území
2. typ .... 1 samice, malé teritorium
3. typ ... krade samice ostatním

$1 > 2$, $2 > 3$, $3 > 1$

Hledejme „nejlepší strategii"

DF Strategii $p^* \in \Delta_1$ nazveme **nejlepší odpovědí** 1. hráče na $q^* \in \Delta_2$, jestliže

$$\pi_1(p^*, q^*) = \max_{p \in \Delta_1} \pi_1(p, q^*) . \quad \text{ZN: } \boxed{p^* \in \beta_1(q^*)}$$

Analogicky nejlepší odpověď 2. hráče na $p^* \in \Delta_1$

$$\pi_2(p^*, q^*) = \max_{q \in \Delta_2} \pi_2(p^*, q) \qquad \boxed{q^* \in \beta_2(p^*)}$$

Nosič strategie p je $C(p) = \{i;\ p_i > 0\}$

... všechny čisté strategie zastoupené s nenulovou pravděpodobností.

LEMMA Platí $p \in \beta_1(q) \iff \forall k \in C(p)\ e^k \in \beta_1(q)$

dk: „$\Leftarrow$" $p_1 A q = p_2 A q$, pak i $p = \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2$ dává stejné hodnoty

„$\Rightarrow$" $\pi_1(p,q) = p A q = \sum p_k e^k A q \qquad p = (p_1, \dots, p_m)$

$$p = \sum_{k=1}^{m} p_k e^k$$

$$0 = \pi_1(p,q) - \pi_1(p,q) = \sum p_k e^k A q - \left(\sum p_k\right) p A q =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k \left(e^k A q - p A q\right) = \sum \underbrace{\underbrace{p_k}_{\geq 0} \big(\underbrace{\pi_1(e^k, q) - \pi_1(p,q)}_{\leq 0} \big)}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow \forall k: \quad p_k = 0 \ \vee \ \pi_1(e^k, q) = \pi_1(p,q)$

$\quad p_k = 0 \ \vee \ e^k \in \beta_1(q)$

$\quad p_k > 0 \ \Rightarrow \ e^k \in \beta_1(q)$ $\square$

DF: Dvojici strategií (p^*, q^*) nazveme **Nashovým equilibriem**, jestliže $p^* \in \beta_1(q^*)$ & $q^* \in \beta_2(p^*)$.

Dvojice (p^*, q^*) je optimální ve smyslu „mění-li jeden a hráčů svou strategii, tak si nepolepší".

VĚTA: Každá hra má Nashovo equilibrium (aspoň 1).
bez dk.

Problém: Je Nashovo equilibrium skutečně „optimální"?
Co je to optimální? Co když je NE více?

PZ: Pro hry s nulovým součtem ANO.
Pro hry s nekonstantním součtem NE.... příště.