N čítací proces

A spr. spojitý, $\mathcal{F}_t$-predikabilní, neklesající, $A_0 = 0$ $\Big\}$ $M = N - A$ je martingal

Pokud A je spojitý proces, pak $\langle M, M \rangle = A$

$$E\left(\int_0^t X \, dM\right)^2 = E \int_0^t X^2 \, dA$$

Definice (mnohorozměrný čítací proces)

$$N = (N_1, \dots, N_k) = \left((N_{1,t}, N_{2,t}, \dots, N_{k,t}), \ t \in [0,T]\right)$$

nazveme mnohorozměrný čítací, pokud

(i) N_i je čítací proces $\forall i$

(ii) pro $i \neq j$ procesy N_i a N_j nemají skoky ve stejných časech skoro jistě

Věta 11: Buď (N_1, N_2) dvourozměrný čítací proces a A_1, A_2 jejich $\mathcal{F}_t$-prediktabilní kompenzátory a pro $M_1 = N_1 - A_1$ i $M_2 = N_2 - A_2$ platí stejné předpoklady jako ve větě 10.

Pak $\langle M_1, M_1 \rangle = A_1$, $\langle M_2, M_2 \rangle = A_2$

a $\langle M_1, M_2 \rangle = 0$

Důkaz: Protože skoky N_1 a N_2 jsou v různých časech (skoro jistě) $N_1 + N_2$ je také čítací proces

$N_1 + N_2 - A$ je martingal, z jednoznačnosti Dooba-Meyerova rozkladu $A = A_1 + A_2$ ($N_1 - A_1 + N_2 - A_2$ je martingal)

$$\langle M_1+M_2, M_1+M_2\rangle = A_1+A_2$$

$(M_1+M_2)^2-(A_1+A_2)$ je martingal

$$= M_1^2+2M_1M_2+M_2^2 - A_1 - A_2 = \underbrace{M_1^2-A_1}_{\text{martingal}} + \underbrace{M_2^2-A_2}_{\text{martingal}} + \overbrace{2M_1M_2}^{\text{martingal}}$$

$$M_1M_2 = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{(M_1+M_2)^2}_{} - \underbrace{(M_1-M_2)^2}_{}\Big)$$

martingaly

$$\frac{1}{4}\Big((M_1+M_2)^2 - \langle M_1+M_2, M_1+M_2\rangle - (M_1-M_2)^2 + \langle M_1-M_2, M_1-M_2\rangle\Big) = M_1M_2 - \langle M_1, M_2\rangle$$

martingal

$=0$

H, G $\mathcal{F}_t$ predikovatelní omezené

$$E\left(\int_0^t H\,dM_1 \cdot \int_0^t G\,dM_2\right) = \operatorname{cov}\left(\int_0^t H\,dM_1, \int_0^t G\,dM_2\right)$$

$$\parallel \text{ v.9}$$

$$E\int_0^t HG\,d\langle M_1, M_2\rangle \overset{\text{v.11}}{=} 0$$

$M_1 = N_1 - A_1$

$M_2 = N_2 - A_2$

$$\downarrow$$

$\int H\,dM_1$ a $\int G\,dM_2$

jsou nekorelované

Co se stane, nebude-li A spojitý?

$$M = N - A$$

<u>Věta 12:</u> Buď (N_1, N_2) dvourozměrný čítací proces, A_1, A_2 příslušné kompenzátory. Nechť $M_1 = N_1 - A_1$ a $M_2 = N_2 - A_2$ splňují předpoklady věty 10. Pak

(i) $\int \Delta M_1 \, dM_1 - \int (1 - \Delta A_1) \, dA_1$ je $\mathcal{F}_t$-martingal (stejně i pro M_2, A_2)

(ii) $\langle M_1, M_1 \rangle = \int (1 - \Delta A_1) \, dA_1$

(iii) $\langle M_1, M_2 \rangle = -\int \Delta A_1 \, dA_2$

$$M_{1,t}^2 = 2\int_{[0,t]} M_{1,s-}\, dM_s + \underline{\sum_{s\le t} (\Delta M_{1,s})^2} \qquad \left(\sum_{s\le t} (\Delta M_1)^2 = \int_{[0,t]} \Delta M_1\, dM_1 \right)$$

$$\underline{\sum_{s\le t} (\Delta M_{1,s})^2} = \int_{[0,t]} \Delta M_1\, dM_1 = \int_{[0,t]} \Delta N_1\, dM_1 - \int_{[0,t]} \Delta A_1\, dM_1$$

$$= \sum_{s\le t} \Big(\underbrace{\Delta N_1}_{\in\{0,1\}} - \Delta N_1 \cdot \Delta A_1 \Big) - \int_{[0,t]} \Delta A_1\, dM_1$$

$$= N_{1,t} - \cancel{\sum_{s\le t} \Delta N_1 \Delta A_1} - 2\int_{[0,t]} \Delta A_1\, dM_1 + \sum_{s\le t} \Delta A_1 \left(\cancel{\Delta N_1} - \Delta A_1 \right)$$

$$= N_1 - \int_{[0,t]} \Delta A_1\, dA_1 - 2\int_{[0,t]} \Delta A_1\, dM_1$$

$$\int_{[0,t)} \Delta M_1 \, dM_1 - \int_{[0,t)} (1-\Delta A_1)\, dA_1 = N_{1,t} - \cancel{\int_{[0,t]} \Delta A_1 \, dA_1} - 2\int_{[0,t]} \Delta A_1 \, dM_1$$

MARTINGAL

$$- A_{1,t} + \cancel{\int_{[0,t)} \Delta A_1 \, dA_1}$$

$$= \underbrace{N_{1,t} - A_{1,t}}_{\text{martingal}} - 2 \overbrace{\int_{[0,t]} \underbrace{\Delta A_1}_{\text{prediktabilní}} dM_1}^{\text{martingal}}$$

F_{s}-prediktabilní!

MARTINGAL

$$\text{(ii)} \quad M_{1,t}^2 - \int_{[0,t]} (1-\Delta A_1)\, dA_1 = \underbrace{2\int_{[0,t]} M_{1,s-} \, dM_s}_{\text{martingal}} + \boxed{\int_{[0,t]} \Delta M_1 \, dM_1 - \int_{[0,t]} (1-\Delta A_1)\, dA_1}$$

$$\underbrace{M^2_{1,t} - \int_{[0,t]} (1-\Delta A_1)\, dA_1}_{\text{je } \mathcal{F}_t\text{-prediktabilní}} \quad \text{je martingal}$$

dA_1 — spojitý zprava

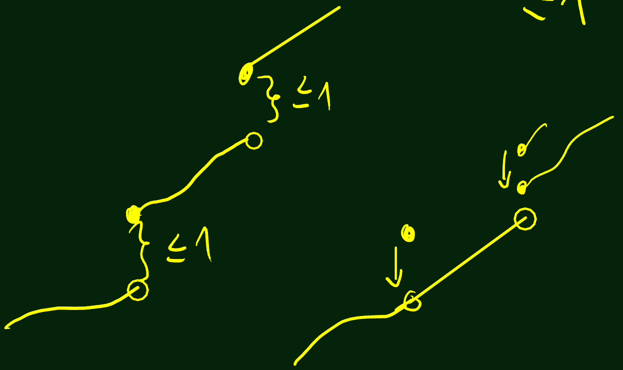
je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

zprava spojitý proces

$$A_{1,t} - \sum_{s\le t} \big(\underbrace{\Delta A_{1,s}}_{\le 1}\big)^2$$

$$\Delta A_{1,s} = \underbrace{A_{1,s}}_{} - \underbrace{A_{1,s-}}_{}$$

$\mathcal{F}_t$-prediktabilní



$$\langle M_1, M_1\rangle + 2\langle M_1, M_2\rangle + \langle M_2, M_2\rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle M_1+M_2, M_1+M_2\rangle = \int_{[0,1]} (1-\Delta(A_1+A_2))\, d(A_1+A_2)$$

$$= \int_{[0,t]} (1-\Delta A_1)\, dA_1 + \int_{[0,t]} (1-\Delta A_2)\, dA_2 - 2\int_{[0,t]} \Delta A_1\, dA_2$$

$$\int_{[0,t]} \Delta A_1\, dA_2 = \int_{[0,t]} \Delta A_2\, dA_1$$

$$= \langle M_1, M_1\rangle + \langle M_2, M_2\rangle + 2\langle M_1, M_2\rangle$$