Algebra — cvičení 7

(příklady cihlovou barvou jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

Faktorokruhy a kořenová/rozkladová nadtělesa

1. Ověřte, že je $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ těleso a spočítejte
   (a) α^5
   (b) α^{-1}
   (c) $(\alpha+1)^{-1}$
   (d) $2\alpha \cdot (2\alpha+1)$
   (e) $\alpha^{-1} \cdot (\alpha+2)$
2. V okruhu $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+\alpha+2)$ najděte prvek, který nemá inverz.
3. Buď T těleso a $a \in T$. Dokažte, že je těleso $T[\alpha]/(\alpha-a)$ izomorfní tělesu T.
4. Dokažte, že je těleso $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3-2)$ izomorfní tělesu $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
5. Napište všechna kořenová a rozkladová nadtělesa polynomů
   (a) x^2-2
   (b) x^3-2x^2-2x-3
   (c)* x^n-1

   nad tělesem $\mathbb{Q}$ obsažená v $\mathbb{C}$.
6. Popište rozkladové nadtěleso polynomu x^2+x+1 nad $\mathbb{Z}_2$ a rozložte v něm daný polynom na lineární členy.

Další počítání

7. V tělese $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ spočtěte
   (a) $(3\alpha^2+4\alpha+1)+(2\alpha^2+4)$
   (b) $(3\alpha^2+4\alpha+1)\cdot(2\alpha^2+4)$
   (c) $(2\alpha^2+4)^{-1}$
   (d) řešení lineární rovnice $\alpha \cdot x + (\alpha+1) = \alpha^2$
8. Napište tabulky operací čtyřprvkového tělesa.
9. Buď $T = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+1)$. Najděte ireducibilní rozklad polynomu x^3-1 v $T[x]$.

11.* Ověřte, že je $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ těleso a najděte v něm všechny kořeny polynomu x^7+1.

12.* Dokažte, že v tělese $T = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ najdete prvek u s vlastností, že každý nenulový prvek tělesa T lze napsat jako mocninu u. Napište ireducibilní rozklad polynomu x^8-1 v $T[x]$.

13.* Dokažte, že existuje izomorfismus mezi okruhy $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^4-1)$ a $\mathbb{Z}_5^4$.

14.* Je následující polynom symetrický?

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

15.* Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

(a) $3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2$,

(b) $x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)$.