Algebrou proti koronaviru 6

(I)reducibilita polynomů v gaussovských oborech

1. Najděte všechny racionální kořeny daných polynomů z $\mathbb{Z}[x]$ (*především určete možné kandidáty, ideálně pomocí Tvrzení 8.5*):
   (a) $2x^3 - x^2 + 3$ $[-1]$
   (b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8.$ $[-\frac{1}{2}, 2]$
2. Rozmyslete si, proč je polynom $f(x) = 2x + 6$ ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$, ale je rozložitelný v $\mathbb{Z}[x]$. Najděte k němu v $\mathbb{Q}[x]$ asociovaný primitivní polynom. [2 je v $\mathbb{Q}$ invertibilní; $x + 3$]
3. Rozmyslete si, proč jsou následující polynomy v příslušných oborech ireducibilní (*může se hodit Eisensteinovo kritérium z Tvrzení 8.6*):
   (a) $x^3 + x^2 + x + 3$ v $\mathbb{Z}[x]$ [musel by mít kořen..]
   (b) $x^4 + x^3 - x + 1$ v $\mathbb{Z}[x]$ [upočítat možný rozklad na kvadratické]
   (c) $4x^3 - 15x^2 + 60x + 180$ v $\mathbb{Z}[x]$ [Eisenstein pro 5]
   (d) $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 24$ v $\mathbb{Q}[x]$ [Eisenstein pro 3 + vztah ireducibility v $\mathbb{Z}[x]$ a $\mathbb{Q}[x]$]
4. Spočtěte v oboru $\mathbb{Z}[x, y]$ NSD pro polynomy $6x^2y$ a $15xy^2 + 21x^3y$. (*Zaměřte se na zdůvodnění dle Věty 8.3 ze skript.*) [NSD $\parallel 3x$]
5. Najděte v příslušných oborech ireducibilní rozklady daných polynomů:

[

	$x^2 - y + 2$	$x^2 - 2y^2$	$x^2 + y^2$	$x^2 + xy + y - 1$
$\mathbb{Q}[x, y]$	ireducibilní	ireducibilní	ireducibilní	$(x + 1)(x - 1 + y)$
$\mathbb{R}[x, y]$	ireducibilní	$(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$	ireducibilní	$(x + 1)(x - 1 + y)$
$\mathbb{C}[x, y]$	ireducibilní	$(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$	$(x + iy)(x - iy)$	$(x + 1)(x - 1 + y)$

]

Čínská věta o zbytcích pro polynomy

Podobně jako v celých číslech, tak i v okruzích polynomů nad tělesy umíme za vhodných podmínek jednoznačně modulo jistý polynom řešit soustavy kongruencí, viz Čínskou větu 9.1 o zbytcích pro polynomy.

6. Vyřešte rovnice:
   (a) $(x^3 + x + 1)f(x) \equiv 1 \pmod{x^4 + x + 1}$ v $\mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^2 + 1) + q(x)(x^4 + x + 1)$ pro libovolné $q(x) \in \mathbb{Z}_2[x]]$
   (b) $(2x + 1)f(x) \equiv x^3 \pmod{x^2 + 1}$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ $[x + 2 + q(x)(x^2 + 1)$ pro libovolné $q(x) \in \mathbb{Z}_3[x]]$
7. Najděte všechny polynomy $f \in \mathbb{Q}[x]$ stupně menšího než 3 splňující $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 2$ pomocí
   (a) jako Lagrangeův interpolační polynom (*Důsledek 9.2 ve skriptech*)
   (b) pomocí Čínské věty o zbytcích $[\frac{1}{2}(3x^2 - 5x + 2)]$
8. Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ co nejmenšího stupně, který splňuje

$$\begin{cases} f \equiv x + 1 \pmod{x^2 + 1} \\ f \equiv x \pmod{x^3 + 1} \end{cases}.$$

$[3x^4 + 3x^3 + 4x + 3]$

Další příklady

9.* (Další možná metoda, používá se obměněná implikace) Ukažte, že je-li primitivní polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ reducibilní a prvočíslo p nedělí vedoucí koeficient $f(x)$, pak je reducibilní i polynom $\overline{f(x)} \in \mathbb{Z}_p[x]$ získaný vzetím koeficientů $f(x)$ modulo p.

10.* Rozhodněte o (i)reducibilitě polynomu $x^5+4x^4+2x^3+3x^2-x+5$ v $\mathbb{Z}[x]$. (Využijte předchozí tvrzení.) [ireducibilní; uvaž mod 3]

11.* (Ještě jedna možná metoda:) Ukažte, že je-li R obor, pak polynom je $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ reducibilní právě tehdy, je-li v $\mathbf{R}[x]$ reducibilní polynom $g(x)$ získaný z $f(x)$ lineární substitucí $x \mapsto ax+b$ pro $a, b \in \mathbf{R}$ a a invertibilní v R.

12.* S využitím předchozího tvrzení rozhodněte o (i)reducibilitě následujících polynomů v $\mathbb{Z}[x]$

(a) $x^4+x^3+x^2+x+1$ [ireducibilní, substituce $x \mapsto x+1$]

(b) x^3+3x^2+5x+5 [ireducibilní, substituce $x \mapsto x-1$]

(c) $\frac{x^p-1}{x-1} = \sum_{i=0}^{p-1} x^i$ pro prvočíslo p [ireducibilní, substituce $x \mapsto x+1$]

.

13.* Rozmyslete si, proč je polynom $3x^3+2x^2+(4-2i)x+(1+i)$ v $(\mathbb{Z}[i])[x]$ ireducibilní. [Eisenstein pro $1+i$]