7. cvičení z PSt — 13.4.2021

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Distribuční funkce

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem $F_X(x) = P(X \le x)$.

1. Pro n.v. X s distribuční funkci F_X vyjádřete
(a) $P(X \in (0,1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) $P(X < 0)$ (d) $P(X \in [0,1])$

2. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.

(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.
(b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

3. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

(a) Jaké je rozdělení X?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

Hustota

Pro spojité n.v. je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je také $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$.

4. Vyjádřete odpovědi na příklad 1 pomocí hustoty pravděpodobnosti (tj. předpokládejte, že X je spojitá).

5. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.

(a) Najděte distribuční funkci F_X.
(b) Najděte hustotní funkci f_X.
(c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $var(X)$, σ_X.

6. Bublifukem vyfoukneme bublinu o poloměru $R \sim U(1,5)$. Jaká je střední hodnota povrchu bubliny?

Výpočty momentů

(k-tý moment n.v. X je $\mathbb{E}(X^k)$.)

7. Buď $X \sim U(a,b)$. Na přednáce jsme si ukazovali výpočet $\mathbb{E}(X)$.

(a) Spočtěte analogicky $\mathbb{E}(X^2)$ a odsud $var(X)$.
(b) Alternativně, uvědomte si napřed, jaké je rozdělení veličiny $Y = X - \mathbb{E}(X)$. Pak spočtěte $\mathbb{E}(Y^2)$ (a tím $var(X)$).

8. Buď $X \sim Exp(\lambda)$. (Tj. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pro $x \ge 0$.)

(a) Napište vzorec pro $f_X(x)$.
(b) Ověřte $\int_{-\infty}^{\infty} f_X = 1$.
(c) Napište vzorec pro $\mathbb{E}(X)$. Spočtete pomocí metody per-partes.
(d) Napište vzorec pro $\mathbb{E}(X^2)$. Spočtete pomocí metody per-partes.
(e) Vypočtěte $var(X)$.

9. (a) Nechť X je diskrétní nebo spojitá náhodná veličina a $X \ge 0$ s.j. Pokud $\mathbb{E}(X)$ existuje, tak $\mathbb{E}(X) \ge 0$. Dokažte.

(b) Nechť Y, Z jsou diskrétní nebo spojité náhodné veličiny a $Y \le Z$ s.j. Pokud $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$ existují, tak $\mathbb{E}(Y) \le \mathbb{E}(Z)$. Dokažte.

Samplování

10. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

(a) Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $var(S_n)$.

(b) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.

(c) Použijte vhodné X_i, aby μ obsahovalo číslo π. Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu π. (Jak velké n myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)

Modelování pomocí n.v.

11. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas se objeví na Staroměstském náměsstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

12. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

13. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

14. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

15. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Bonusy

16. Návod, jak ověřit, že hustota normálního rozdělení se opravdu zintegruje na 1. Chceme vypočítat $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}$, resp. ukázat, že $I = \sqrt{2\pi}$. Ukážeme místo toho, že $I^2 = 2\pi$. Platí totiž

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy$$

a tento dvojný integrál se velmi zjednoduší po převodu do polárních souřadnic.

17. (a) Uvažme seznam států světa a jejich aktuálního počtu obyvatel. Odhadněte, kolik z těchto počtů začíná jedničkou! (Lhostejno, na které pozici na první jednička je.)

(b) Srovnejte s nějakou skutečnou tabulkou, např. na `https://www.worldometers.info/world-population/population-by-country/`.

(c) Promyslete, proč by to tak mohlo být. Případně si přečtěte o *Benfordově zákonu*.

18. Střední hodnota diskrétní i spojité náhodné veličiny splňuje

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt - \int_{-\infty}^0 P(X < t)dt.$$

K procvičení

19. Nechť $U \sim U(0,1)$ a $p \in [0,1]$. Uvažme funkci

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x > p \\ 1 & \text{pro } x \leq p \end{cases}$$

Co můžete říct of n.v. $X = g(U)$? Spočtěte její střední hodnotu dvěma způsoby – přímo ze znalosti jejího rozdělení i pomocí pravidla LOTUS.

20. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin
(a) $-X$. (b) $X^+ = \max(0, X)$, (c) $X^- = -\min(X, 0)$, (d) $|X| = X^+ + X^-$,

21. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0,3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte
(a) $P(1 \leq X \leq 2)$
(b) $P(X \leq Y)$
(c) $P(X \leq Z)$
(d) hustotní funkci f_X.
(e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

22. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)
(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

23. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.
(a) Jaké je λ?
(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

24. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).
(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?
(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, …(Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

25. $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$.

(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.

(b) Spočtěte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$.

(c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

26. Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0,1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

27. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

28. Nechť $X \sim N(0,1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $var(Y)$.

Nápovědy

1: Připomeňte si definici. V části (c) napište výsledek jako limitu nekonečně mnoha hodnot F_X.
2: Použijte větu o úplné pravděpodobnosti.
3: Určete distribuční funkci. Střední hodnotu jsme si říkali na přednášce.
6: Pravidlo LOTUS.