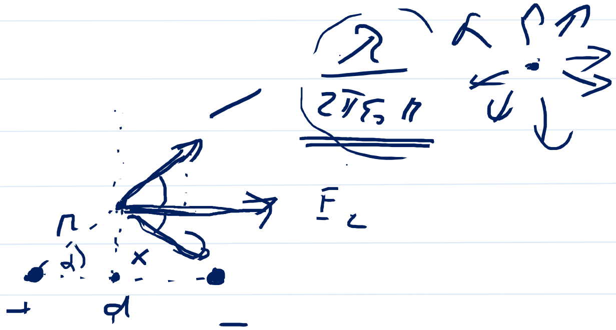
1.1.22. Dva dlouhé tenké vodiče, vložené rovnoběžně ve vzdálenosti *d* od sebe jsou nabity s lineární hustotou +λ a -λ (λ=konst.). Určete intenzitu pole ***E*** v bodě, který leží v rovině symetrie ve vzdálenosti *x* od roviny v níž leží vodiče.

DÚ



$$E_z = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{d/2}{r}\cdot 2 = \frac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2\right)}$$

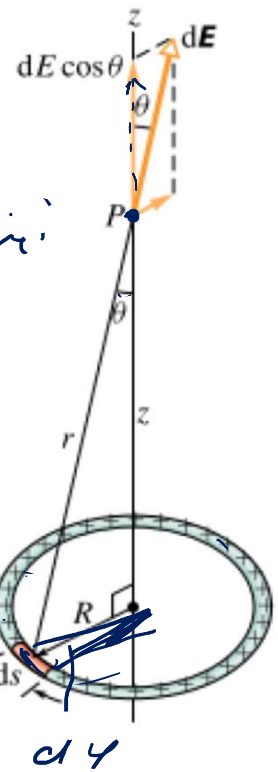
Tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ. Jaká je intenzita E elektrického pole v bodě P

DÚ

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, ds}{r^2}\cdot \underbrace{\cos\theta}_{\frac{z}{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau z}{r^3}\,\overbrace{ds}^{R\,d\varphi}$$

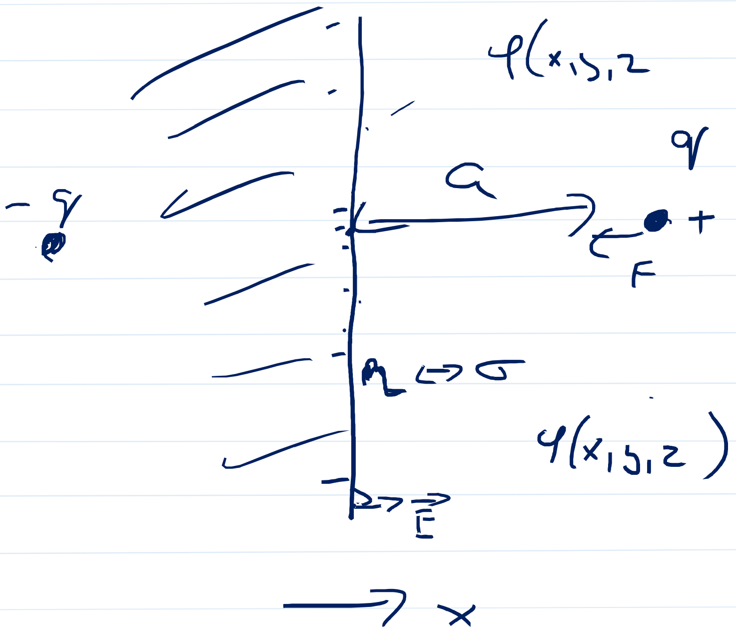
$$E = \int_k dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau z}{r^3}\, R\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{\overbrace{2\pi\tau R}^{Q}\; z}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}$$

Q - náboj na kružnici



DÚ

S 1.1.14. Určete potenciál elektrostatického pole vzbuzeného bodovým nábojem *q* nacházejícím se ve vzdálenosti *a* od vodivé rovinné stěny udržované na nulovém potenciálu. Určete dále plošnou hustotu η náboje na vodivé stěně, jeho celkovou velikost a sílu *F*, kterou je náboj přitahován ke stěně.

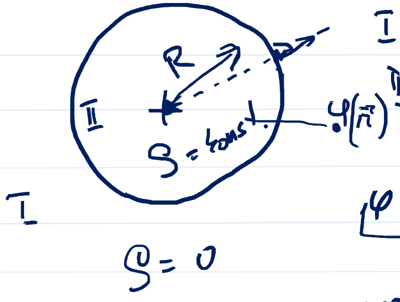


$$\varphi = \varphi_{+q} + \varphi_{-q}$$

$$E_n = \varepsilon_0 \sigma \qquad -\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{\text{na rovině } (0,y,z)}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \eta = \varepsilon_0 E_n$$

Modif. S 1.1.24 Koule o poloměru R je rovnoměrně nabita nábojem s objemovou hustotou ρ=konst. Nalezněte průběh potenciálu pomocí integrace Poissonovy rovnice $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$



I − $r \geq R$ $\quad \Delta\varphi = 0 \quad$ div grad $\varphi = 0$

II − $r \leq R$ $\quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\varphi = \varphi(r)$ → sférické souřadnice → Δ ? $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

r, φ, ϑ

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\varphi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\varphi$$

$$\varphi = \varphi(r) \to \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}$$

Okr. podmínky

řešení I + řešení v II

$\varphi^{I}(r) \qquad \varphi^{II}(r)$

1) spojitost ⇒ $\varphi^{I}(r)\big|_{r=R} = \varphi^{II}(r)\big|_{r=R}$

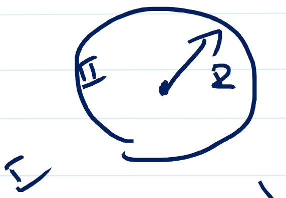
2) ref. bod $\quad \varphi(\infty) = 0$

3) chování v počátku → potenciál byl konečný – aby nedivergoval

4) $E_{1n} - E_{2n} = \sigma = 0$ normálové složky $\vec{E}$ jsou spojité pro $r = R$

$$-\frac{\partial\varphi^{I}}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

Q_c - celkový náboj koule



$\varphi = \varphi(r)$

II) $\Delta\varphi^{II} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad r \le R$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi^{II})}{dr^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(r\varphi^{II})'' = -r\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\int d\frac{d}{dr}(r\varphi) = \int -r\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dr$$

$$\frac{d}{dr}(r\varphi)$$

$$(r\varphi^{II})' = -\frac{1}{2}r^2\frac{\rho}{\varepsilon_0} + A$$

$$r\varphi^{II} = -\frac{1}{6}r^3\frac{\rho}{\varepsilon_0} + Ar + B$$

$$\varphi^{II}(r) = -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2 + A + \frac{B}{r}$$

podm. (3)

I) $\Delta\varphi = 0$ $\quad r \ge R$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2 r\varphi^{I}}{dr^2} = 0$$

$$\frac{d}{dr}r\varphi^{I} = C$$

$$r\varphi^{I} = Cr + D$$

$$\varphi^{I}(r) = C + \frac{D}{r} \qquad r \ge R$$

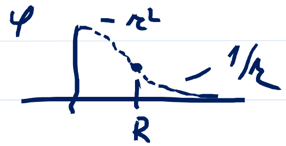
uplatníme podm. $\varphi(\infty) = 0$

$\Rightarrow C = 0$

$$\varphi^{I}(r)\Big|_{r=R} = \varphi^{II}(r)\Big|_{r=R} \qquad -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 + A = \frac{D}{R} \Rightarrow \underline{A} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 + \frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2\frac{1}{6}(3) =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2}$$

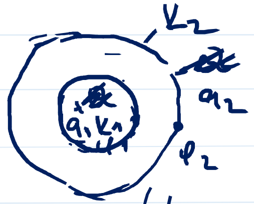
$$\frac{d\varphi^{I}}{dr}\Big|_R = \frac{\partial\varphi''}{\partial r}\Big|_R \Rightarrow -\frac{D}{R^2} = -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}2R \Rightarrow \underline{D = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^3}$$



vně $r \ge R$ $\quad \varphi^{I}(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^3\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}_{Q_c}$

uvnitř $\quad \varphi^{II}(r) = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 =$

(A)1.2.5. Kulový vodič K1 o poloměru R1 je obklopen soustřednou vodivou kulovou slupkou K2 o poloměru R2. Pro tuto soustavu vypočítejte kapacitní a influenční koeficienty a přesvědčte se, že platí Cik = Cki.



$$q_1 = C_{11}\varphi_1^0 + C_{12}\varphi_2^0$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1^0 + C_{22}\varphi_2^0$$

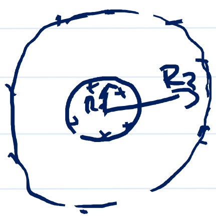
určete C

φ_1^0 – potenciál K_1

φ_2^0 = Potenciál K_2

$\varphi_1^0(q_1,q_2)$, $\varphi_2^0(q_1,q_2)$ $\Longrightarrow$ $q_1 = q_1(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$

$q_2 = q_2(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$



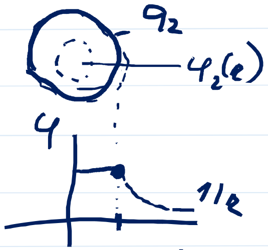
$K_1^{q_1}$

K_1 budí potenciál

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \qquad r > R_1$$

příspěvek koule K_2

$$\varphi_2(r) = K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \qquad R_1 \le r \le R_2$$



celkový potenciál $\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right) \qquad R_1 \le r \le R_2$$

Potenciál koule K_1 $\varphi_1^0 = \varphi(r)\big|_{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$, koule K_2: $\varphi_2^0 = \varphi(r)\big|_{r=R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}$

(1) $\varphi_1^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$

(2) $\varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2}\right)$

q_1 (1) − (2) $\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} \Rightarrow q_1$ − DÚ

q_2 $\frac{1}{R_2}$(1) − $\frac{1}{R_1}$(2) $\Rightarrow q_2$ DÚ

vučeto $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}$ DÚ

mrčeto kapacitu C