ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ $\longleftrightarrow$ d'Alambertova transformace

$x_1' = x_2$
$x_2' = x_3$
$x_3' = x_4$
$\vdots$
$x_{n-1}' = x_n$
$x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n)$

$\uparrow$ n-tá derivace

dif. rovnice n-tého řádu.

poč. podmínky:
$x(t_0) = x_0$
$x'(t_0) = x_1$
$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

(neboli $x_1 = x'$, $x_2 = x''$, $x_3 = x'''$, $\dots$, $x_n = x^{(n-1)}$)

$\rightsquigarrow$ Existence, jednoznačnost řešení $\forall$ počáteční podmínky, ... veškerá další teorie lze aplikovat na rovnice vyšších řádů.

1. Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Př $x'' + 2x' - 3x = 0$

motivace:

dosadíme $x(t) = e^{\lambda t}$ ... $x' = \lambda e^{\lambda t}$, $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} - 3e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$ Charakteristický polynom

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$$

Tedy máme 2 řešení: e^t, e^{-3t} .. Fundamentální systém (báze prostoru řešení)

snadno ověříme, že i všechny lineární kombinace jsou řešením $\rightsquigarrow$ $\underline{x(t) = a \cdot e^t + be^{-3t}}$

Zároveň z teorie víme, že množina všech řešení tvoří

vektorový prostor dimenze n... v našem případě n=2
$\Rightarrow$ našli jsme všechna řešení!

Poč. podmínky $x(1)=e$, $x'(1)=0$ ...

$x(1) = a\cdot e^{1} + be^{-3} = e$ $\rightsquigarrow$ dopočítání jednoznačné a, b
$x'(1) = ae^{1} - 3be^{-3} = 0$
$-4be^{-3} = e$
$b = \frac{1}{4}e^{4}$, $a = +\frac{3}{4}$ ... $\underline{\underline{x(t) = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{4}e^{-3t}}}$

Př. $x'' + 2x' + x = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$ ... dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -1$

e^{-t}, te^{-t} ... fundamentální systém

Všechna řešení $x(t) = a\cdot e^{-t} + bt\cdot e^{-t}$

Pz: Kdyby λ bylo 5-tinásobný kořen, pak dostaneme
$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, t^3e^{\lambda t}, t^4e^{\lambda t}$

Př. $x'' + x' + 2x = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$
komplexní kořeny

F.S. $e^{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)t}, e^{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)t} \rightsquigarrow e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t, e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

$e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$

2. lineární rovnice s nenulovou pravou stranou

Př. $x'' + 2x' - 3x = t + 1$

$\boxed{1.}$ řešíme $x'' + 2x' - 3x = 0 \rightsquigarrow a \cdot e^{t} + b e^{-3t}$

$\boxed{2.}$ hledáme tzv. partikulární řešení nehomogenní rce
- buď variací konstant
- nebo podle násl. věty

Věta: Máme-li rovnici $x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = g(t)$ a $g(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy, pak existuje řešení rovnice tvaru $x_p(t) = e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)t^{k}$, kde R, S jsou polynomy, jejichž stupně nepřevyšují vyšší ze stupňů polynomů P, Q a k je násobnost $\alpha + i\beta$ jako kořene charakteristického polynomu rovnice.

---

v našem případě $g(t) = t + 1$ $\qquad \alpha = 0, \beta = 0$

$P(t) = t + 1$

$0 + 0i$ není kořenem char. pol. $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$$x_p = e^{0t}\left(\underbrace{(at+b)}_{R(t)}\cos 0t + \underbrace{(ct+d)}_{S(t)}\sin 0t\right) \cdot t^{0}$$

$x_p = at + b$ ... dosadíme do rovnice

$x_p' = a, \quad x_p'' = 0$

$$0 + 2 \cdot a - 3(at + b) = t + 1$$

$$-3at + 2a - 3b = t + 1$$

$-3a = 1 \qquad a = -\frac{1}{3}$

$2a - 3b = 1 \qquad -3b = 1 - 2a = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$b = -\frac{5}{9} \qquad x_p = -\frac{1}{3}t - \frac{5}{9}$

$\boxed{3.}$ všechna řešení dif. rce jsou $\boxed{x(t) = a \cdot e^{t} + b \cdot e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{5}{9}}$