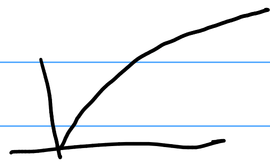
APDR - 6. PŘEDNÁŠKA

MINULE: 1. SIR

$$S' = -\beta(N)SI + \mu S$$
$$I' = \beta(N)SI - \alpha I - \mu I$$
$$R' = \alpha I - \mu R$$
$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

- β konstantní
- obvykle se uvažují $\beta(N) = \dfrac{C(N)}{N}$
  - nejjednodušší případ $C(N) = \beta \cdot N$
  - $C(N) = \beta \cdot N^a$, $a = 0{,}05$ $\quad \beta(N)$

    u měst střední velikosti

    pro nemoci šířící se kontaktem
  - uvažuje se též $\beta(N) = \dfrac{aN}{1+bN}$
  - pro pohlavní choroby $C(N) = \text{konst}$

2. SEIR

$$S' = -\beta S(I + \varepsilon E)$$
$$E' = \beta SI - \varkappa E$$
$$I' = \varkappa E - \alpha I$$
$$R' = f\alpha I$$

E.. exposed jsou v inkubační době

f podíl uzdravených

3. SITR

$$S' = -\beta S(I + \delta T)$$
$$I' = \beta IS - (\alpha_1 + \gamma)I$$
$$T' = \gamma I - \alpha_2 T$$
$$R' = f_1 \alpha I + f_2 \alpha_2 T$$

T... treatment

$\frac{1}{\alpha}$ délka trvání choroby

f.. procento uzdravených

treatment ... podáme léky, snížíme počet kontaktů

- **SEQIJR** (epidemie SARS 2002-3)

$$S' = -\beta(N)S(I+\varepsilon_J J + \varepsilon_E E + \varepsilon_Q Q) \quad \text{náchylní}$$
$$E' = \beta(N)(\dots) - \varkappa_1 E - \gamma_1 E \quad \text{exposed ... v inkubační době}$$
$$Q' = \gamma_1 E - \varkappa_2 Q \quad \text{karanténě}$$
$$I' = \varkappa_1 E - \gamma_2 I - \alpha_1 I \quad \text{infekční}$$
$$J' = \varkappa_2 Q + \gamma_2 I - \alpha_2 I \quad \text{izolovaní}$$
$$R' = f_1\alpha_1 I + f_2\alpha_2 I \quad \text{uzdravení}$$

$\varepsilon_J, \varepsilon_E, \varepsilon_Q > 0$ typicky $\varepsilon_J, \varepsilon_E, \varepsilon_Q \ll 1$

- **SLIAR** ... modelování chřipky

$$S' = -\beta S(I+\varepsilon A) \quad \text{náchylní}$$
$$L' = \beta S(I+\varepsilon A) - \varkappa L \quad \text{latentní ... ještě nešíří infekci}$$
$$I' = p\varkappa L - \alpha_1 I \quad \text{infekční}$$
$$A' = (1-p)\varkappa L - \alpha_2 A \quad \text{asymptomatičtí}$$
$$R' = f_1\alpha_1 I + f_2\alpha_2 A \quad \text{uzdravení}$$
$$N' = (1-f_1)\alpha_1 I + (1-f_2)\alpha_2 A \quad \text{celková populace}$$

II.4 Přihrádkové modely obecně

$N(t)$ ... populace ... rozdělíme do tříd

$(x_1, \dots, x_n)$ ... nemocné třídy $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$(y_1, \dots, y_m)$ ... zdravé třídy $\vec{y}(t) = \dots$

Např. SLIAR $\vec{x} = (L, I, A)$ $\vec{y} = (S, R)$

$$\boxed{x_i'(t) = \Gamma_i(\vec{x}, \vec{y}) - \Phi_i(\vec{x}, \vec{y})}$$

Γ_i ... nově nakažení, kteří se dostanou do i-té třídy nakažených z některé třídy zdravých

Φ_i ... odtok z i-té třídy do jiných tříd nenakažených nebo uzdravených

$$\boxed{y_j'(t) = g_j(\vec{x}, \vec{y})}$$

g_j … přírůstek do j-té třídy zdravých

Předpoklady na Γ, Φ, g:

- $\Gamma_i(x,y) \geq 0 \quad \forall i, \forall x, y$
- $\Gamma_i(0,y) = 0, \ \Phi_j(0,y) = 0 \quad \forall i,j \ \forall y$
- pokud $x_i = 0$, pak $\Phi_i(x,y) \leq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x,y) \geq 0$ celkový úbytek ze všech tříd nakažených je nezáporný.
- $\vec{y}' = \vec{g}(0, \vec{y})$ má stacionární bod, a to právě jeden a ten je asymptoticky stabilní (y_0)

Co je reprodukční číslo, jak ho definovat

buď y_0 jediný stac. bod soustavy $y' = g(0,y)$

Předpokládejme, že $y(0) = y_0$ a $x(0) = 1$ (nebo ε)
(objeví se malé množství nakažených)

$$x' = \Gamma(x,y) - \Phi(x,y) \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$y' = g(x,y) \qquad y = (y_1, \dots, y_m)$$

Zajímá mě chování soustavy na okolí bodu $(0, y_0)$
… soustavu linearizuji

Linearizovaná soustava :

$$x' = \underbrace{\cancel{\Gamma(0,y_0)}}_{=0} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(\ldots)x + \overbrace{\cancel{\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(\ldots)(y-y_0)}}^{=0}$$

$$- \underbrace{\cancel{\Phi(0,y_0)}}_{=0} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(.)x - \overbrace{\cancel{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(.)(y-y_0)}}^{=0}$$

$$y' = g(0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,y_0)\,x + \frac{\partial g}{\partial y}(0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

1. rovnice nezávisí na y => 2. rovnici nepotřebuji

$$\underbrace{x'}_{\text{vektor}} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(0,y_0)}_{\text{čtvercová matice, značené je } F} \underbrace{x}_{\text{vektor}} - \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,y_0)}_{\text{matice } n\times n \ldots V} x$$

$$F_{ij} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j}$$

$$\boxed{x' = (F-V)\,x} \quad \text{na okolí } 0$$

Předpokládejme, že nepřibývají noví nakažení, zaměříme se na rovnici $x' = -Vx$

řešení rovnice s p.p. $x(0) = \vec{x}_0$ ... ozn. $\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$

(matematici vědí, že $\varphi(t,x) = e^{-tV}x_0$)

$\int_0^{+\infty} \varphi(t,x_0)\,dt$ udává kolik času $\vec{x}(t)$ strávili jednotliví infikovaní v které třídě.

$$\|$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tV}x_0\,dt = \underbrace{V^{-1}x_0} \qquad \left[-V^{-1}e^{-tV}x_0\right]_0^{+\infty}$$

$$\left(V^{-1}e^{-tV}\right)' = V^{-1}(-V)e^{-tV} = -e^{-tV}$$

Výraz $FV^{-1}x_0$ je ...

Při počátečním rozdělení $\vec{x}_0$ udává $V^{-1}x_0$ rozdělení do tříd po nějakém čase.

$FV^{-1}x_0$ je počet nově nakažených v jednotlivých třídách.

F_{ij} říká, kolik nově infikovaných do i-té třídy přidá 1 infikovaný v j-té třídě.

Matice FV^{-1} se nazývá matice další generace

Ve 2. generaci mám $FV^{-1}x_0$ nově inf.
3. generaci $(FV^{-1})^2 x_0$ — " — ..

k. generaci $(FV^{-1})^{k-1} x_0$ nově inf.

R_0 si označme největší vlastní číslo
... má vlastní vektor $\vec{v}$

$$(FV^{-1})v = R_0 v \quad a \quad (FV^{-1})^k v = R_0^k v$$

R_0 ... nazveme Reprodukční číslo

$R_0 > 1$ ... epidemie roste

$R_0 < 1$ ... epidemie odeznívá.