- f definovaná na (a,b) má na (a,b) Newtonův integrál, $\exists F(x)$ primitivní k f na (a,b), $\exists \lim_{x\to a+} F(x) \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to b-} F(x) \in \mathbb{R}$

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

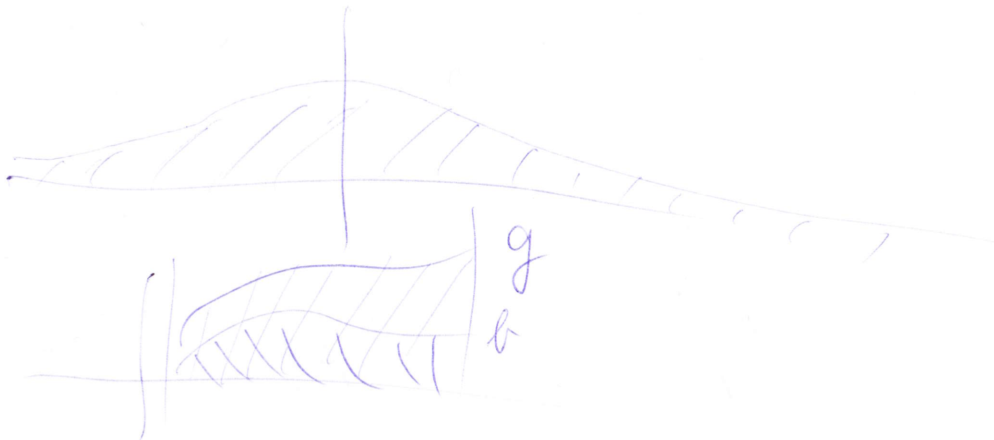
- f spojitá na $[a,b] \Rightarrow \exists$ primit. fce $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$. a existuje $(N)\int_a^b f(t)\,dt$
- $f \in N(a,b)$, $a<c<b \iff f \in N(a,c)$ & $f \in N(c,b)$

1.3. Konvergence integrálu

Cílem této kapitoly je určit, kdy je $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konečný.

V tomto případě říkáme, že $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Příklad: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$



Připomeň: Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu, pak $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Příklady: 1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

$\alpha \neq 1$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \log x - 0 = +\infty$ $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ D

2. $\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \log^\alpha x}\,dx$ K $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\alpha \neq 1$ $\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \log^\alpha x}\,dx = \left[\frac{\log^{-\alpha+1} x}{-\alpha+1}\right]_2^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\log^{-\alpha+1} x}{-\alpha+1} - \frac{\log^{-\alpha+1} 2}{-\alpha+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > 1$

$\int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\,dx = [\log \log x]_2^\infty = \infty$

$\boxed{\text{KÚ22: } \int_{10}^\infty \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log\log x}\,dx}$

3. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$

$\alpha \neq 1$ $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{-\alpha+1} - \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha < 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_0^1 = 0 - \lim_{x\to 0+} \log x \ \ldots \ \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ D

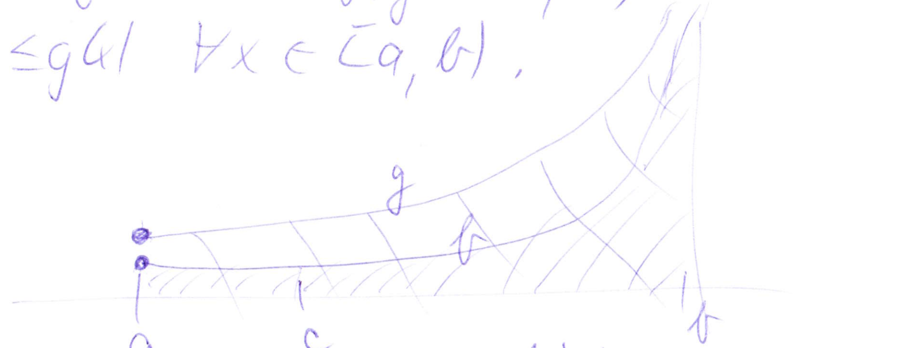
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot |\log x|^\alpha}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

$\alpha \neq 1$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot (-\log x)^\alpha}\,dx = \left[-\frac{(-\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{(-\log \frac{1}{2})^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \lim_{x\to 0+} -\frac{(-\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

$\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta L 7.12 (srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu) 14-3

Nechť $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$ a $a<b$. Nechť jsou funkce $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ spojité na $[a,b)$ a nechť $0\le f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b)$.
Pak $g\in N(a,b) \Rightarrow f\in N(a,b)$.

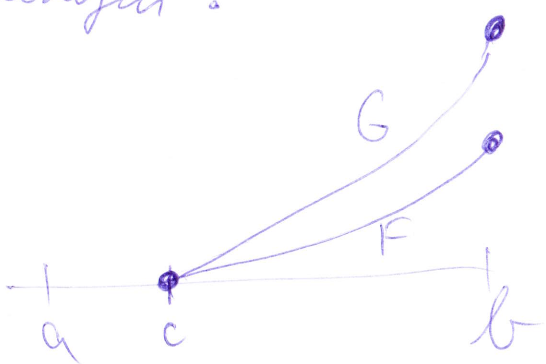


Dk: Zvolme $c\in(a,b)$ a označme G a F primitivní funkce k f a g. BÚNO $G(c)=F(c)$ (jinak odečti konstantu)

$(G-F)'(x) = (g-f)(x)\ge 0$ na $[a,b)$ $\Rightarrow$ ~~g-f je neklesající~~ $G-F$ je neklesající na $[a,b)$

Dále $G(c)=F(c) \Rightarrow G(x)\ge F(x)$ $\forall x\in[c,b)$

Dále $G'=g\ge 0$ a $F'=f\ge 0 \Rightarrow$ F a G jsou neklesající.



$g\in N(a,b) \Rightarrow \lim\limits_{x\to b-} G(x)\in\mathbb{R}$

F je neklesající $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to b-} F(x)\in\mathbb{R}^*$

ale $F\le G$ $\mp$ a $\lim\limits_{x\to b-} G(x)\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to b-} F(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow f\in N(c,b)$ } $\Rightarrow f\in N(a,b)$

Dále f spojitá na $[a,c] \Rightarrow f\in N(a,c)$ $\square$

Pozn: platí analogie i pro $(a,b]$. | $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$

Příklad: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx$ K .. fce je spojitá na $[0,1]$ 14-4

na $[1,\infty)$: $0 \le \frac{1}{1+x^4} \le \frac{1}{x^4}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$ K .. $4>1$ $\Longrightarrow$ srovnávací kritérium

$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$ K $\Longrightarrow$ $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ K

$\boxed{\text{Věta L 7.13}}$ (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a<b$. Nechť jsou funkce $f,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ spojité a nezáporné na $[a,b)$. Jestliže existuje

$\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $g \in N(a,b) \Leftrightarrow f \in N(a,b)$

Příklad: $\int_1^\infty \underbrace{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}_{f(x)}\,dx$ $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^3} = g(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} = 2 \in (0,\infty)$$

$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ K $\quad \frac{5}{2}>1 \xrightarrow{L\int K} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,dx$ K

Dk: Označme $A = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Z definice limity pro

$\varepsilon = \frac{A}{2}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b, \delta) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon = \frac{A}{2}$

neboli $\exists x_0 \in (a,b)\ \forall x \in [x_0, b) : \frac{3}{2} A \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} A$.

Platí tedy $\forall x \in [x_0, b)$: $\frac{3}{2} A\, g(x) \geq f(x) \geq \frac{1}{2} A g(x)$.

$g \in N(a,b) \Rightarrow \frac{3}{2} A \cdot g(x) \in N(a,b) \Rightarrow \frac{3}{2} A g(x) \in N(x_0, b) \overset{V\,7.12.}{\Rightarrow} f \in N(x_0, b)$

dále f spojitá na $[a, x_0]$, tedy $f \in N(a, x_0) \Rightarrow f \in N(a,b)$

$f \in N(a,b) \Rightarrow f(x) \in N(x_0, b) \overset{V\,7.12}{\Rightarrow} \frac{1}{2} A g(x) \in N(x_0, b) \Rightarrow g(x) \in N(x_0, b)$

dále g spojitá na $[a, x_0]$, tedy $g \in N(a, x_0) \Rightarrow g \in N(a, b)$

$\square$

Poznámka: platí i analogie pro $(a, b]$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ (odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b)$ a $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \cdot \inf_{x \in [a,b)} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t) g(t)\,dt \le g(a) \cdot \sup_{x \in [a,b)} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Speciálně platí $\left| \int_a^b f(t) g(t)\,dt \right| \le g(a) \cdot \sup_{x \in [a,b)} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right|$.

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx \quad K \qquad = \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos 2x}_{f(x)}$$

f spojitá $\quad F = \dfrac{\sin 2x}{2}$ je omezená na $[1, \infty)$

g spojitá, monotónní, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

Dirichletovo kritérium $\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{1}{x} \cancel{\cos x} \cos 2x\,dx \in \mathbb{R}$

Věta T 7.14 (Abelovo – Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí

(A) Je-li $f \in N(a, b)$ a g je omezená, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

(D) Je-li $F(x)$ omezená na (a, b) a $\lim_{x \to b_-} g(x) = 0$, pak $f \cdot g \in N(a, b)$.

$\int_a^b f(x) g(x)\, dx$

Příklad: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje, ale nekonverguje absolutně

$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{f(x)}\, dx$$

f spojitá, $F(x) = -\cos x$ je omezená na $[1, \infty)$

g spojitá, monotónní, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

Podle Dirichletova kritéria $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ K.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{\frac{1 - \cos 2x}{2}}{x}\, dx =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{2x} - \overbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\, dx}^{\in \mathbb{R}} = +\infty - \overset{\in \mathbb{R}}{a} = +\infty.$$